THE QUARTERLY JOURNAL OF MATHEMATICS

(OXFORD SERIES).

Volume 5 *No.* 18 *June* 1934

CONTENTS

OXFORD
AT THE CLARENDON PRESS
1934

Price 7s. 6d. net

THE QUARTERLY JOURNAL OF MATHEMATICS

OXFORD SERIES

THE QUARTERLY JOURNAL OF MATHEMATICS (OXFORD SERIES) is, by arrangement with the publishers, the successor to *The Quarterly Journal of Mathematics* and *The Messenger of Mathematics*. The Journal is published in March, June, September, and December, at a price of 7s. 6d. net for a single number with an annual subscription (for four numbers) of 27s. 6d. post free.

Papers, of a length normally not exceeding 20 printed pages of the Journal, are invited on subjects of Pure and Applied Mathematics, and should be addressed 'The Editors, Quarterly Journal of Mathematics, Clarendon Press, Oxford'. Contributions can be accepted in French and German, if in typescript (formulae excepted). Authors of papers printed in the Quarterly Journal will be entitled to 50 free offprints. Correspondence on the *subject-matter* of the Quarterly Journal should be addressed, as above, to 'The Editors', at the Clarendon Press. All other correspondence should be addressed to the Publisher (Mr. Humphrey Milford, Oxford University Press, Amen House, Warwick Square, London, E.C. 4).

HUMPHREY MILFORD
OXFORD UNIVERSITY PRESS
AMEN HOUSE, LONDON, E.C. 4

SOME DIFFERENTIAL EQUATIONS AND ASSOCIATED INTEGRAL EQUATIONS

By C. G. LAMBE (*Heythrop*) and D. R. WARD (*Heythrop*)

[Received 30 January 1934]

1. Introduction

THE functions considered in this paper are all derived from functions which satisfy the linear differential equation

$$x(x-1)(x-a)u''+\{\gamma(x-1)(x-a)+ \\ +\delta(x-a)x+\epsilon x(x-1)\}u'+\alpha\beta(x-h)u = 0, \qquad (1.1)$$

where
$$1+\alpha+\beta-\gamma-\delta-\epsilon = 0 \qquad (1.2)$$

and h is an arbitrary constant. The general theory of linear differential equations* shows that such functions have four regular singularities at 0, 1, a, ∞ respectively, and that they may be symbolized in the usual Riemann notation by the scheme

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & a & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & x \\ 1-\gamma & 1-\delta & 1-\epsilon & \beta & \end{matrix}\right\}.$$

It can be shown, in a manner entirely similar to the corresponding analysis of the solutions of the hypergeometric equation, that if $F(a,h;\alpha,\beta,\gamma,\delta;x)$ be that solution of (1.1) which is analytic at the origin and equal to unity there, then any solution of (1.1) can be expressed simply in terms of functions similar to $F(a,h;\alpha,\beta,\gamma,\delta;x)$.

The function $F(a,h;\alpha,\beta,\gamma,\delta;x)$ has been studied by Heun,† van Vleck,‡ and others, and it has applications in mathematical physics. It is related to the hypergeometric function in that it has four singular points instead of three, and degenerates into the hypergeometric function when $a = h = 1$, or when $\epsilon = 0$ and $h = a$; and the Lamé function is the particular case of $F(a,h;\alpha,\beta,\gamma,\delta;x)$ when $\alpha = -\frac{1}{2}m$

* See, for example, Whittaker and Watson, *Modern Analysis*, 3rd ed. (1920), 197.

† Heun, 'Zur Theorie der Riemann'schen Funktionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten': *Math. Annalen*, 33 (1899), 161 and 180. Heun defines $F(a,h;\alpha,\beta,\gamma,\delta;x)$ as that solution of (1.1) which is equal to the hypergeometric function $F(\alpha,\beta;\gamma;x)$ when $a = h = 1$. The two definitions are equivalent.

‡ Van Vleck, 'On certain differential equations of the second order allied to Hermite's equation': *American J. of Math.* 21 (1899), 126.

and $\gamma = \delta = \epsilon = \frac{1}{2}$. By the processes of (i) confluence of singularities and (ii) giving particular values to the parameters, other functions are obtained which are well known in the theory of functions.

So far as is known, there is no representation of $F(a, h; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ by a definite integral, where the integrand consists of known and simpler functions. It has, in fact, been conjectured that no such representation exists, and that the nearest approach to a relation of this type would be a homogeneous integral equation.

In the present paper it is shown that when the parameters α and h are so adjusted that $F(a, h; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ is a polynomial, it is also the solution of a certain homogeneous integral equation, and that, in general, these polynomials are the only solutions of the integral equation. The proof of this is given in § 2. With other conditions on the parameters the equation (1.1) has solutions which are algebraic functions, and the integral equations of which these are the solutions are given in § 3. In the final section of the paper various integral equations are given whose solutions are functions obtained from $F(a, h; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ by giving various particular values to the parameters and by confluence of the singularities.

2. Polynomial solutions

2.1. The function $F(a, h; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ may be expanded as a power series in x, $\sum_{\nu=0}^{\infty} G_\nu(h)x^\nu$, whose radius of convergence is $\min(1, |a|)$, and by consideration of the differential equation (1.1) it may easily be proved that the coefficients of this expansion satisfy the relations

$$G_0(h) = 1, \qquad G_1(h) = h\alpha\beta/\gamma a,$$

and

$$a(\nu+1)(\nu+\gamma)G_{\nu+1}(h) - [\nu^2(1+a) + \nu\{a(\gamma+\delta-1)+\gamma+\epsilon-1\} + \alpha\beta h]G_\nu(h) + (\nu+\alpha-1)(\nu+\beta-1)G_{\nu-1}(h) = 0. \quad (2.1)$$

These relations show that $G_\nu(h)$ is a polynomial of degree ν in h.

The necessary and sufficient conditions that $F(a, h; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ should be a polynomial of degree n in x are

(i) that one of the exponents* α, β should be $-n$;

(ii) that h should be a root of the equation

$$G_{n+1}(h) = 0.$$

* When one of the exponents α, β is equal to $-n$, and the other to $-m$, a negative integer greater than $-n$, the polynomial will degenerate into one of degree m for $m+1$ values of h. This does not affect the analysis which follows.

This theorem is proved substantially by van Vleck,* and is easily deducible from the recurrence-relation (2.1).

Since $G_{n+1}(h)$ is a polynomial of degree $n+1$ in h, the equation $G_{n+1}(h) = 0$ has $n+1$ roots, and these will be denoted by $h_1, h_2,\ldots, h_{n+1}$. For the remainder of this section it is assumed that $\alpha = -n$, and that h has one of the $n+1$ values $h_1,\ldots,h_{n+1}$. For brevity the polynomial $F(a, h_\nu; -n, \beta, \gamma, \delta; x)$ will be written $F(h_\nu, x)$.

2.2. THEOREM. *The polynomials $F(h_\nu, x)$ are solutions of the integral equation*

$$\phi(x) = \lambda \int\limits_C F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{xt}{a}\right) t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1} \phi(t)\, dt,$$

provided

$$\sum_{r=0}^{n} G_r(h_\nu)\psi(r) \neq 0,$$

where

$$\psi(r) = \int\limits_C t^{\gamma+r-1}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1} dt,$$

and C is a Pochhammer double-loop contour, round the points $t = 0$, $t = 1$, and such that the point $t = a$ is not within the contour.

The completely rigorous proof of this theorem is long: in what follows, the justification of various steps is omitted, since it proceeds on quite normal lines.

(*a*) If by $\chi(x, t)$ be denoted the hypergeometric function $F(\alpha, \beta; \gamma; u)$ where $u = xt/a$, then

$$x\frac{\partial \chi}{\partial x} = t\frac{\partial \chi}{\partial t} = u\frac{d\chi}{du}, \tag{2.21}$$

$$x^2\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = t^2\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = u^2\frac{d^2\chi}{du^2}, \tag{2.22}$$

and

$$u(u-1)\frac{d^2\chi}{du^2}+\{u(1+\alpha+\beta)-\gamma\}\frac{d\chi}{du}+\alpha\beta\chi = 0. \tag{2.23}$$

Denoting by $\mathbf{M}\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ the differential operator

$$t(t-1)(t-a)\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\{\gamma(t-1)(t-a)+\delta(t-a)t+\epsilon t(t-1)\}\frac{\partial}{\partial t}+\alpha\beta t,$$

where

$$1+\alpha+\beta-\gamma-\delta-\epsilon = 0, \tag{2.24}$$

* Loc. cit.

it can be verified by direct substitution from (2.21) and (2.22) that

$$\left\{\mathbf{M}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \mathbf{M}\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right)\right\}\chi(x,t)$$

$$\equiv (x-t)\left\{u(u-1)\frac{d^2\chi}{du^2} + \{u(\gamma+\delta+\epsilon)-\gamma\}\frac{d\chi}{du} + \alpha\beta\chi\right\}$$

$$= 0,$$

in virtue of (2.23) and (2.24), so that

$$\left\{\mathbf{M}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \mathbf{M}\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right)\right\}\chi(x,t) = 0. \tag{2.25}$$

If, further, $\overline{\mathbf{M}}\left(t, \frac{d}{dt}\right)$ be the adjoint of $\mathbf{M}\left(t, \frac{d}{dt}\right)$, it may be proved that

$$\overline{\mathbf{M}}\left(t, \frac{d}{dt}\right)\left\{t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1}\right\}u(t)$$

$$= t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1}\mathbf{M}\left(t, \frac{d}{dt}\right)u(t) \tag{2.26}$$

for any function $u(t)$.

(*b*) Suppose now that $\Re(\gamma) > 2$, $\Re(\delta) > 2$, $|a| > 1$, and consider the function $\phi(x)$ defined by the convergent integral

$$\phi(x) = \int_0^1 F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{xt}{a}\right)t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1}F(h_\nu, t)\,dt.$$

Then

$$\left\{\mathbf{M}\left(x, \frac{d}{dx}\right) - \alpha\beta h_\nu\right\}\phi(x)$$

$$= \int_0^1 t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1}F(h_\nu, t)\left\{\mathbf{M}\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right) - \alpha\beta h_\nu\right\}F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{xt}{a}\right)dt$$

in virtue of (2.25). On integrating by parts the integrated parts vanish, and after using (2.26) the equation becomes

$$\left\{\mathbf{M}\left(x, \frac{d}{dx}\right) - \alpha\beta h_\nu\right\}\phi(x)$$

$$= \int_0^1 F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{xt}{a}\right)t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1}\left\{\mathbf{M}\left(t, \frac{d}{dt}\right) - \alpha\beta h_\nu\right\}F(h_\nu, t)\,dt.$$

Since $F(h_\nu, t)$ satisfies the equation $\{\mathbf{M}(t, d/dt) - \alpha\beta h_\nu\}F(h_\nu, t) = 0$, it follows that this last integral is zero. Hence $\phi(x)$ satisfies the differential equation (1.1). But from its definition $\phi(x)$ is a polynomial

in x, hence $\phi(x) = kF(h_\nu, x)$, where k is a constant. The transition from the integral considered to the Pochhammer integral and with it the removal of the conditions on γ, δ, a is effected in the usual way, and so

$$\lambda^{-1}F(h_\nu, x) = \int_C F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{xt}{a}\right)t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1} F(h_\nu, t)\, dt.$$

In order to determine λ, put $x = 0$ on both sides of the equation, whence it follows that

$$\lambda^{-1} = \int_C t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1} F(h_\nu, t)\, dt$$

$$= \sum_{r=0}^{n} G_r(h_\nu)\psi(r).$$

Hence, provided this last expression does not vanish, $F(h_\nu, x)$ is a solution of the integral equation

$$\phi(x) = \lambda \int_C F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{xt}{a}\right)t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1} \phi(t)\, dt. \quad (2.27)$$

2.3. The theorem just proved does not show that the integral equation (2.27) has not other solutions besides the polynomials $F(h_\nu, x)$; nor does it show that these solutions correspond to different characteristic values of λ. The following lemmas lead to the more satisfying theorem that, in general, the integral equation (2.27) has as its only solutions the polynomials $F(h_\nu, x)$ and that each corresponds to a different characteristic value of λ.

2.31. LEMMA. *If $h_\nu \neq h_\mu$, then*

$$\int_C F(h_\nu, t)t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1} F(h_\mu, t)\, dt = 0,$$

where C is the contour of the last theorem.

Suppose

$$\int_0^1 F(h_\nu, t)t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1} F(h_\mu, t)\, dt = A,$$

where $\qquad \Re(\gamma) > 2, \qquad \Re(\delta) > 2, \qquad |a| > 1.$

Then, since $\qquad \alpha\beta h_\nu F(h_\nu, t) = \mathbf{M}\left(t, \frac{d}{dt}\right) F(h_\nu, t),$

$$\alpha\beta h_\nu A = \int_0^1 t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1} F(h_\mu,t)\,\mathbf{M}\left(t,\frac{d}{dt}\right)F(h_\nu,t)\,dt.$$

Now integrating by parts, and using (2.26), it follows that

$$\alpha\beta h_\nu A = \int_0^1 t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1} F(h_\nu,t)\mathbf{M}\left(t,\frac{d}{dt}\right)F(h_\mu,t)\,dt$$

since the integrated parts vanish.

Hence $$\alpha\beta h_\nu A = \alpha\beta h_\mu A$$
so that $$A = 0.$$

The transition from the integral considered to the Pochhammer integral is effected as before, and the theorem is thus proved.

DEFINITION. *The $n+1$ constants $\theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_{n+1}$ are defined by the equations*

$$\theta_\nu = \int_C \{F(h_\nu,t)\}^2 t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1} dt.$$

2.32. LEMMA. *If*

(i) *the $n+1$ roots of the equation $G_{n+1}(h) = 0$ are all distinct,*

(ii) $A_\nu^{-1} = a(n+1)(n+\gamma)G'_{n+1}(h_\nu)G_n(h_\nu)P_n^{-1}\alpha^{-1}\beta^{-1}$,

where
$$P_r = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+r-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+r-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+r-1)r!\,a^r}, \qquad P_0 = 1,$$

then
$$\sum_{\nu=1}^{n+1} A_\nu F(h_\nu,x)F(h_\nu,t) = F\left(\alpha,\beta;\gamma;\frac{xt}{a}\right).$$

Since for all values of h and k

$$\begin{aligned} a(r+1)(r+\gamma)G_{r+1}(h)-&\\ -[r^2(1+a)+r\{a(\gamma+\delta-1)+\gamma+\epsilon-1\}+\alpha\beta h]G_r(h)+&\\ +(r+\alpha-1)(r+\beta-1)G_{r-1}(h) &= 0,\\ a(r+1)(r+\gamma)G_{r+1}(k)-&\\ -[r^2(1+a)+r\{a(\gamma+\delta-1)+\gamma+\epsilon-1\}+\alpha\beta k]G_r(k)+&\\ +(r+\alpha-1)(r+\beta-1)G_{r-1}(k) &= 0,\end{aligned}$$

it follows, on multiplying the first of these by $G_r(k)P_r^{-1}$ and the second by $G_r(h)P_r^{-1}$ and subtracting, that

$$\begin{aligned}(r+\alpha)(r+\beta)\{G_{r+1}(h)G_r(k)-G_{r+1}(k)G_r(h)\}P_{r+1}^{-1}-&\\ -(r+\alpha-1)(r+\beta-1)\{G_r(h)G_{r-1}(k)-G_r(k)G_{r-1}(h)\}P_r^{-1}&\\ = \alpha\beta(h-k)G_r(h)G_r(k)P_r^{-1}.&\end{aligned}$$

Putting $r = 0, 1, 2,\ldots, n$ and summing,

$$\sum_{r=0}^{n} G_r(h)G_r(k)P_r^{-1} = a(n+1)(n+\gamma)\frac{\{G_{n+1}(h)G_n(k)-G_{n+1}(k)G_n(h)\}}{\alpha\beta(h-k)P_n}.$$

When $k \to h$, the right-hand side of this equation approaches a definite limit, and so

$$\sum_{r=0}^{n}\{G_r(h)\}^2P_r^{-1} = a(n+1)(n+\gamma)\{G'_{n+1}(h)G_n(h)-G_{n+1}(h)G'_n(h)\}P_n^{-1}\alpha^{-1}\beta^{-1}.$$

Putting $h = h_\nu$, $k = h_\mu$ in these last two results, we have

$$\sum_{r=0}^{n} G_r(h_\nu)G_r(h_\mu)P_r^{-1} = \begin{cases} 0 & \text{if } \nu \neq \mu, \\ A_\nu^{-1} & \text{if } \nu = \mu. \end{cases} \tag{2.321}$$

Hence, if $\qquad K_{r\nu} \equiv A_\nu^{\frac{1}{2}} G_r(h_\nu)P_r^{-\frac{1}{2}} \quad \begin{cases} r = 0, 1,\ldots, n, \\ \nu = 1, 2,\ldots, n+1, \end{cases}$

the determinant $|K_{r\nu}|$ is orthogonal, and

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} K_{r\nu}K_{s\nu} = \begin{cases} 0 \text{ if } r \neq s, \\ 1 \text{ if } r = s; \end{cases}$$

that is,
$$\sum_{\nu=1}^{n+1} A_\nu G_r(h_\nu)G_s(h_\nu) = \begin{cases} 0 \text{ if } r \neq s, \\ P_r \text{ if } r = s. \end{cases} \tag{2.322}$$

Hence

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{n+1} A_\nu F(h_\nu, x)F(h_\nu, t) &= \sum_{\nu=1}^{n+1}\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{n} A_\nu G_r(h_\nu)G_s(h_\nu)x^r t^s \\ &= \sum_{r=0}^{n} P_r x^r t^r \\ &= F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{xt}{a}\right).\end{aligned}$$

2.33. Lemma. *If h_1, $h_2,\ldots, h_{n+1}$ are all distinct and if none of the numbers $1-\gamma-n$, $1-\delta$, $\gamma+\delta+n$ are integers less than or equal to zero, then, for every ν, $A_\nu\theta_\nu$ differs from zero.*

From Lemma 2.31 and the definition of θ_ν,

$$\int\limits_C F(h_\nu, t)F(h_\mu, t)t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1}dt = \begin{cases} 0 & \text{if } \mu \neq \nu, \\ \theta_\nu & \text{if } \mu = \nu. \end{cases}$$

Multiplying this equation by $A_\mu G_r(h_\mu)$, putting $\mu = 1, 2,\ldots, n+1$, and summing, it follows from (2.322) that

$$\begin{aligned}A_\nu\theta_\nu G_r(h_\nu) &= \int\limits_C F(h_\nu, t)P_r t^{\gamma+r-1}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1}dt \\ &= P_r\sum_{s=0}^{n} G_s(h_\nu)\psi(s+r). \end{aligned} \tag{2.331}$$

If now $A_\nu \theta_\nu = 0$, then $\sum_{s=0}^{n} G_s(h_\nu)\psi(s+r)$ vanishes for every r, so that the determinant $|\psi(s+r)|$ $(s,\, r = 0, 1,..., n)$ vanishes.

Writing μ instead of ν in (2.331), it is plain that $A_\mu \theta_\mu$ also vanishes, so that

$$\sum_{s=0}^{n} G_s(h_\nu)\psi(s+r) = 0$$

for every r and every ν. Multiplying this last equation by $A_\nu G_t(h_\nu)$, putting $\nu = 1, 2,..., n+1$, and summing, it follows from (2.322) that $\psi(s+t) = 0$ for every s and t satisfying the inequalities $0 \leqslant s,\, t \leqslant n$. Hence for every s satisfying $0 \leqslant s \leqslant 2n$, $\psi(s)$ vanishes.

But

$$\psi(s) = \int\limits_C t^{\gamma+s-1}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1} dt$$

$$= \frac{4\pi^2 e^{i\pi\gamma} F(\gamma+s, 1-\epsilon; \gamma+\delta+s; a^{-1})}{\Gamma(1-\gamma-s)\Gamma(1-\delta)\Gamma(\gamma+s+\delta)}.$$

Under the conditions stated, not all of these expressions vanish, and so none of the numbers $A_\nu \theta_\nu$ vanish.

2.4. Theorem. *If*

(i) $\alpha = -n$, *and* γ, δ, ϵ *are such that the roots of* $G_{n+1}(h) = 0$ *are all distinct,*

(ii) *none of the numbers* $A_\nu \theta_\nu$ *vanish,*

then the integral equation

$$\phi(x) = \lambda \int\limits_C F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{xt}{a}\right) t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1} \phi(t)\, dt \tag{2.4}$$

has as its only solutions the $n+1$ *polynomial solutions of the differential equation*

$$u'' + \left\{\frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x-1} + \frac{\epsilon}{x-a}\right\}u' + \frac{\alpha\beta(x-h)}{x(x-1)(x-a)}u = 0,$$

$F(h_1, x)$, $F(h_2, x)$,..., $F(h_{n+1}, x)$; *and the corresponding characteristic values of* λ *are* $(A_1\theta_1)^{-1}$, $(A_2\theta_2)^{-1}$,..., $(A_{n+1}\theta_{n+1})^{-1}$ *respectively.*

Plainly any solution of the integral equation is a polynomial of degree not greater than n in x, and since the functions $F(h_\nu, x)$ are linearly independent, any solution $\phi(x)$ may be written in the form $\sum_{\nu=1}^{n+1} K_\nu F(h_\nu, x)$.

Substituting for $\phi(x)$ and $\phi(t)$ in the integral equation, and sub-

stituting for $F(\alpha,\beta;\gamma;xt/a)$ the expression found in Lemma 2.3, it follows that

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} K_\nu F(h_\nu, x)$$

$$= \lambda \sum_{\nu=1}^{n+1}\sum_{\mu=1}^{n+1} \int A_\mu F(h_\mu, x) F(h_\mu, t) t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1} K_\nu F(h_\nu, t)\, dt$$

$$= \lambda \sum_{\nu=1}^{n+1} A_\nu \theta_\nu K_\nu F(h_\nu, x)$$

by Lemma 2.31.

Hence, since the functions $F(h_\nu, x)$ are linearly independent, it follows that for every ν,

$$K_\nu - \lambda A_\nu \theta_\nu K_\nu = 0.$$

The only solutions of these equations, apart from the trivial solution in which every K is zero, are

$$K_r = 0 \quad (r \neq \nu), \qquad \lambda = \{A_\nu \theta_\nu\}^{-1},$$

since the fact that no two h's are identical implies that all the numbers $A_\nu \theta_\nu$ are distinct, and $A_\nu \theta_\nu$ does not vanish.

Hence the only solutions of the integral equation are the polynomials $F(h_1, x)$, $F(h_2, x)$,..., $F(h_{n+1}, x)$, and the corresponding characteristic values of λ are $(A_1\theta_1)^{-1}$, $(A_2\theta_2)^{-1}$,..., $(A_{n+1}\theta_{n+1})^{-1}$.

2.5. Two notes are appended to this theorem:

(i) In it and in the lemmas leading up to it the contour of integration is the Pochhammer double-loop contour encircling the points $t = 0$, $t = 1$, but this is by no means essential to the truth of the theorem. A similar contour encircling either the points $t = 1$, $t = a$, or the points $t = a$, $t = 0$ would have served equally well. Further, as is obvious, these contours may, under certain conditions, be reduced to a simple straight line joining the singularities. These facts have their application. For certain values of the parameters it may happen that when one contour is chosen all the ψ's vanish; the difficulty may in general be avoided by choosing one of the other available contours.

(ii) The analysis leading up to Theorem 2.4 breaks down completely when the equation $G_{n+1}(h) = 0$ has one or more multiple roots. If this is so, the integral equation ceases to have a unique

solution corresponding to a multiple root h_ν, and in its place has an ambiguous solution involving one or more of the functions $\partial F(h_\nu, x)/\partial h_\nu, \partial^2 F(h_\nu, x)/\partial h_\nu^2, \ldots$ and a number of arbitrary parameters according to the multiplicity of the root. The analysis establishing this is more involved but not less elementary than what has preceded.

3. Quasi-algebraic Solutions*

3.1. The differential equation (1.1) is satisfied by a function symbolized by

$$u(x) = P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & a & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & x \\ 1-\gamma & 1-\delta & 1-\epsilon & \beta & \end{matrix}\right\},$$

and it is clear we may write

$$u(x) =$$

$$x^\lambda(1-x)^\mu(1-x/a)^\nu P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & a & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+\lambda+\mu+\nu & x \\ 1-\gamma-2\lambda & 1-\delta-2\mu & 1-\epsilon-2\nu & \beta+\lambda+\mu+\nu & \end{matrix}\right\},$$

where $\lambda = 0$ or $1-\gamma$; $\mu = 0$ or $1-\delta$; $\nu = 0$ or $1-\epsilon$, and the function symbolized by P satisfies a differential equation similar to (1.1). If now the function P be a polynomial, $u(x)$ will be a quasi-algebraic function, and there are thus eight possible types of such solutions of (1.1). Denoting these by $y_1, y_2, \ldots, y_8$, and by $P^{(n)}(x)$ a polynomial of degree n, the following are the conditions for the existence of quasi-algebraic solutions of the various types:

$y_1 \equiv P^{(n)}(x)$, if $\alpha = -n$

$y_2 \equiv x^{1-\gamma}P^{(n)}(x)$, if $\alpha+1-\gamma = -n$

$y_3 \equiv (1-x)^{1-\delta}P^{(n)}(x)$, if $\alpha+1-\delta = -n$

$y_4 \equiv (1-x/a)^{1-\epsilon}P^{(n)}(x)$, if $\alpha+1-\epsilon = -n$

$y_5 \equiv (1-x)^{1-\delta}(1-x/a)^{1-\epsilon}P^{(n)}(x)$, if $\alpha+2-\delta-\epsilon = -n$

$y_6 \equiv (1-x/a)^{1-\epsilon}x^{1-\gamma}P^{(n)}(x)$, if $\alpha+2-\epsilon-\gamma = -n$

$y_7 \equiv x^{1-\gamma}(1-x)^{1-\delta}P^{(n)}(x)$, if $\alpha+2-\gamma-\delta = -n$

$y_8 \equiv x^{1-\gamma}(1-x)^{1-\delta}(1-x/a)^{1-\epsilon}P^{(n)}(x)$, if $\alpha+3-\gamma-\delta-\epsilon = -n$,

h having appropriate values in each case.

* By a quasi-algebraic function is meant a function of the type

$$(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-e)^\epsilon P(x),$$

where $\alpha, \beta, \ldots, \epsilon$ are not necessarily rational, and where $P(x)$ is a polynomial. If $\alpha, \beta, \ldots, \epsilon$ are *all* rational, this is an algebraic function.

It follows from the work of the preceding section that these solutions of (1.1) are also solutions of the integral equations:

$$y_1:\quad u(x) = \lambda \int\limits_C F\left(\alpha,\beta;\gamma;\frac{xt}{a}\right) t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1} u(t)\,dt \tag{3.11}$$

$$y_2:\quad u(x) = \lambda \int\limits_C F\left(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1;2-\gamma;\frac{xt}{a}\right)\times$$
$$\times x^{1-\gamma}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1} u(t)\,dt \tag{3.12}$$

$$y_3:\quad u(x) = \lambda \int\limits_C F\left(\alpha-\delta+1;\beta-\delta+1;\gamma;\frac{xt}{a}\right)\times$$
$$\times t^{\gamma-1}(1-x)^{1-\delta}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1} u(t)\,dt \tag{3.13}$$

$$y_4:\quad u(x) = \lambda \int\limits_C F\left(\alpha-\epsilon+1,\beta-\epsilon+1;\gamma;\frac{xt}{a}\right)\times$$
$$\times t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1-\epsilon} u(t)\,dt \tag{3.14}$$

$$y_5:\quad u(x) = \lambda \int\limits_C F\left(\alpha-\delta-\epsilon+2,\beta-\delta-\epsilon+2;\gamma;\frac{xt}{a}\right)\times$$
$$\times t^{\gamma-1}(1-x)^{1-\delta}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1-\epsilon} u(t)\,dt \tag{3.15}$$

$$y_6:\quad u(x) = \lambda \int\limits_C F\left(\alpha-\epsilon-\gamma+2,\beta-\epsilon-\gamma+2;2-\gamma;\frac{xt}{a}\right)\times$$
$$\times x^{1-\gamma}(1-t)^{\delta-1}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1-\epsilon} u(t)\,dt \tag{3.16}$$

$$y_7:\quad u(x) = \lambda \int\limits_C F\left(\alpha-\gamma-\delta+2,\beta-\gamma-\delta+2;2-\gamma;\frac{xt}{a}\right)\times$$
$$\times x^{1-\gamma}(1-x)^{1-\delta}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\epsilon-1} u(t)\,dt \tag{3.17}$$

$$y_8:\quad u(x) = \lambda \int\limits_C F\left(\alpha-\gamma-\delta-\epsilon+3,\beta-\gamma-\delta-\epsilon+3;2-\gamma;\frac{xt}{a}\right)\times$$
$$\times x^{1-\gamma}(1-x)^{1-\delta}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1-\epsilon} u(t)\,dt. \tag{3.18}$$

The contour is in each case a Pochhammer double-loop encircling

two of the finite singularities of the differential equation, but for certain sets of values of the parameters it may be reduced.

3.2. It is natural to ask whether the integral equation (2.4) has solutions which are also solutions of the differential equation (1.1) when α is not a negative integer. There are some indications that this is not so, but a rigorous proof of the conjecture is still lacking.

4. Related Equations

4.1. *Lamé's equation.* When $\alpha = -\frac{1}{2}m$, $\beta = \frac{1}{2}(m+1)$, $\gamma = \delta = \epsilon = \frac{1}{2}$, the differential equation (1.1) becomes Lamé's equation, and the functions $y_1, y_2, \ldots, y_8$ are the eight kinds of Lamé functions. When m is an even integer, the functions y_1, y_5, y_6, y_7 exist, and the remaining four exist when m is an odd integer. The integral equations satisfied by these functions may be obtained from (3.11)–(3.18) by substituting the requisite values of the parameters, but the hypergeometric functions occurring in the integrands may be expressed more simply as Legendre polynomials or their derivatives. The integral equations satisfied by the various kinds of Lamé functions are thus:

$$y_1, y_2\colon\quad u(x) = \lambda\int\limits_0^1 P_m\left(\sqrt{\frac{xt}{a}}\right)t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}u(t)\,dt \tag{4.11}$$

$$y_4, y_6\colon\quad u(x) = \lambda\int\limits_0^1 P'_m\left(\sqrt{\frac{xt}{a}}\right)t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}u(t)\,dt \tag{4.12}$$

$$y_3, y_7\colon\quad u(x) = \lambda\int\limits_0^1 P'_m\left(\sqrt{\frac{xt}{a}}\right)t^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}u(t)\,dt \tag{4.13}$$

$$y_5, y_8\colon\quad u(x) = \lambda\int\limits_0^1 P''_m\left(\sqrt{\frac{xt}{a}}\right)t^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}u(t)\,dt. \tag{4.14}$$

Lamé functions may be conveniently expressed in terms of Jacobian elliptic functions by the transformation

$$k^2 = a, \qquad x = k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha.$$

So expressed, the eight kinds may be divided into four groups according to the factors which multiply a polynomial in $\mathrm{sn}^2\alpha$:

y_1: $P(\mathrm{sn}^2\alpha)$; $\qquad$ y_2: $\mathrm{sn}\,\alpha\, P(\mathrm{sn}^2\alpha)$

y_4: $\mathrm{cn}\,\alpha\, P(\mathrm{sn}^2\alpha)$; $\qquad$ y_6: $\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\alpha\, P(\mathrm{sn}^2\alpha)$

$$y_3: \quad \operatorname{dn}\alpha\, P(\operatorname{sn}^2\alpha); \qquad y_7: \quad \operatorname{sn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\, P(\operatorname{sn}^2\alpha)$$

$$y_5: \quad \operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\, P(\operatorname{sn}^2\alpha); \qquad y_8: \quad \operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\, P(\operatorname{sn}^2\alpha),$$

where P stands for a polynomial. The corresponding integral equations whose solutions are these functions are then

$$y_1, y_2: \quad E(\alpha) = \lambda \int_{-2K}^{2K} P_m(k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}s)E(s)\,ds \tag{4.15}$$

$$y_4, y_6: \quad E(\alpha) = \lambda \int_{-2K}^{2K} \operatorname{cn}\alpha\operatorname{cn}s\, P_m'(k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}s)E(s)\,ds \tag{4.16}$$

$$y_3, y_7: \quad E(\alpha) = \lambda \int_{-2K}^{2K} \operatorname{dn}\alpha\operatorname{dn}s\, P_m'(k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}s)E(s)\,ds \tag{4.17}$$

$$y_5, y_8: \quad E(\alpha) = \lambda \int_{-2K}^{2K} \operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\operatorname{cn}s\operatorname{dn}s\, P_m''(k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}s)E(s)\,ds. \tag{4.18}$$

The integral equations (4.15) and (4.18) are given by Whittaker.*

4.2. *Associated Lamé functions.* The associated Lamé function† in its algebraic form satisfies the differential equation

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\left\{\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\gamma}{x-a}\right\}\frac{du}{dx}-\frac{m(m+2\gamma)(x-h)}{4x(x-1)(x-a)}u = 0,$$

and so is another particular case of the functions considered.

If m is an integer greater than zero, there are four types of algebraic solution:

$$y_1 = P^{\frac{1}{2}m}(x) \text{ when } m \text{ is even,}$$
$$y_2 = x^{\frac{1}{2}}P^{\frac{1}{2}(m-1)}(x) \text{ when } m \text{ is odd,}$$
$$y_3 = (1-x)^{\frac{1}{2}}P^{\frac{1}{2}(m-1)}(x) \text{ when } m \text{ is odd,}$$
$$y_4 = x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}P^{(\frac{1}{2}m)-1}(x) \text{ when } m \text{ is even.}$$

Further, if $\nu = m+2\gamma-2$, and ν is an integer greater than zero, there are four types of quasi-algebraic solution:

$$y_5 = (1-x/a)^{1-\gamma}P^{\frac{1}{2}\nu}(x) \text{ when } \nu \text{ is even,}$$
$$y_6 = x^{\frac{1}{2}}(1-x/a)^{1-\gamma}P^{\frac{1}{2}(\nu-1)}(x) \text{ when } \nu \text{ is odd,}$$
$$y_7 = (1-x)^{\frac{1}{2}}(1-x/a)^{1-\gamma}P^{\frac{1}{2}(\nu-1)}(x) \text{ when } \nu \text{ is odd,}$$
$$y_8 = x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}(1-x/a)^{1-\gamma}P^{(\frac{1}{2}\nu)-1}(x) \text{ when } \nu \text{ is even.}$$

* *Proc. London Math. Soc.* (2) 14 (1914), 260; Whittaker and Watson, loc. cit. 564–7.

† Cf. Whittaker, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 33 (1914), 14; Ince, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 41 (1922), 99; *Ordinary Differential Equations* (London, 1927), 502.

The integral equations whose solutions are these functions are found to be

$$y_1, y_2\colon\quad u(x) = \lambda \int\limits_0^1 C_m^\gamma\left(\sqrt{\frac{xt}{a}}\right) t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-1} u(t)\,dt, \tag{4.21}$$

$$y_3, y_4\colon\quad u(x) = \lambda \int\limits_0^1 C_m'^\gamma\left(\sqrt{\frac{xt}{a}}\right) t^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{\gamma-1} u(t)\,dt, \tag{4.22}$$

$$y_5, y_6\colon\quad u(x) = \lambda \int\limits_0^1 C_{m+2\gamma-2}^{2-\gamma}\left(\sqrt{\frac{xt}{a}}\right) t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1-\gamma} u(t)\,dt, \tag{4.23}$$

$$y_7, y_8\colon\quad u(x) = \lambda \int\limits_0^1 C_{m+2\gamma-2}'^{2-\gamma}\left(\sqrt{\frac{xt}{a}}\right) t^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1-\gamma} u(t)\,dt, \tag{4.24}$$

where C is the Gegenbauer function.* It is believed that the results (4.22) and (4.24) are new.

4.3. *Confluent Heun functions.* The function $v(x)$ which is a solution of the differential equation

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\left\{\frac{\gamma}{x}+\frac{\delta}{x-1}\right\}\frac{dv}{dx}+\frac{c_0+c_1x-l^2x^2}{x(x-1)}v = 0 \tag{4.31}$$

bears the same relation to Heun's function $F(a,h;\alpha,\beta,\gamma,\delta;x)$ as the confluent hypergeometric function bears to the hypergeometric function, and it has for this reason been called by the writers the confluent Heun function. The equation has two finite regular singularities and an irregular singularity of the second order at infinity. A particular case of it has been studied by Whittaker† and Ince.‡

The equation (4.31) is not a particular case of (1.1) but is obtained from the latter by a limiting process.

In the differential equation (1.1) write

$$\epsilon = -2la,$$

and after dividing the equation through by a, let a tend to infinity, α, γ, δ remaining finite, while β tends to infinity in virtue of the

* Whittaker and Watson, loc. cit., 329.

† *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 33 (1914), 22.

‡ *Proc. London Math. Soc.* (2) 23 (1924), 56, and (2) 25 (1926), 53. For physical applications of this equation see a paper by the same author in *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 45 (1925), 106.

relation $1+\alpha+\beta-\gamma-\delta-\epsilon = 0$, so that $\beta/a \to -2l$. The equation then becomes

$$u''+\left\{\frac{\gamma}{x}+\frac{\delta}{x-1}+2l\right\}u'+\frac{2l\alpha(x-h)}{x(x-1)}u = 0,$$

and, by writing $u = e^{-lx}v$, it follows that

$$v''+\left\{\frac{\gamma}{x}+\frac{\delta}{x-1}\right\}v'+\frac{c_0+c_1x-l^2x^2}{x(x-1)}v = 0,$$

where $$c_1 = l(2\alpha-\gamma-\delta+l).$$

The nucleus $F(\alpha,\beta;\gamma;xt/a)$ of the integral equation satisfies the differential equation

$$\frac{d^2\omega}{dz^2}+\left\{\frac{\gamma}{z}+\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{z-a}\right\}\frac{d\omega}{dz}+\frac{\alpha\beta}{z(z-a)}\omega = 0,$$

where $z = xt$. Carrying out the same limiting process on this equation, the result is the equation

$$z\omega''+(\gamma+2lz)\omega'+2\alpha l\omega = 0,$$

and the solution of this equation which is analytic at the origin is

$$\omega = {}_1F_1(\alpha;\gamma;-2lz) = {}_1F_1(\alpha;\gamma;-2lxt).$$

Since the factor $(1-t/a)^{\epsilon-1}$ in the integral equation becomes e^{2lt} when a tends to infinity, the limiting process suggests that, when α is a negative integer, the integral equation

$$\phi(x) = \lambda\int\limits_C e^{l(x+t)}{}_1F_1(\alpha;\gamma;-2lxt)t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1}\phi(t)\,dt$$

has solutions of the form $e^{lx}P^{(n)}(x)$, where $P^{(n)}(x)$ is a polynomial of degree n, which are solutions of (4.31) for certain values of the parameter c_0.

It can, in fact, be proved rigorously that this is so by methods entirely similar to those used in § 2 of this paper. If $\alpha = -n$ there are $n+1$ characteristic values of c_0 such that the solution of (4.31) is of the form $e^{lx}P^{(n)}(x)$. If $h_1, h_2,..., h_{n+1}$ be these values and $y(h_1, x)$, $y(h_2, x),..., y(h_{n+1}, x)$ be the corresponding solutions, then corresponding to (2.21) are the orthogonal relations

$$\int\limits_C y(h_\nu, t)y(h_\mu, t)t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1}\,dt = 0, \text{ if } h_\nu \neq h_\mu,$$

and there are orthogonal relations between the coefficients corresponding to (2.321) and (2.322).

The equation (4.31) has four types of solution which are products of an exponential function and a quasi-algebraic function:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= e^{lx}P^{(n)}(x) && (\alpha = -n),\\
y_2 &= e^{lx}x^{1-\gamma}P^{(n)}(x) && (\alpha-\gamma+1 = -n),\\
y_3 &= e^{lx}(1-x)^{1-\delta}P^{(n)}(x) && (\alpha-\delta+1 = -n),\\
y_4 &= e^{lx}x^{1-\gamma}(1-x)^{1-\delta}P^{(n)}(x) && (\alpha-\gamma-\delta+2 = -n),
\end{aligned}
$$

where $P^{(n)}(x)$ stands for a polynomial of degree n in x.

These functions are found to be the solutions of the integral equations:

$$y_1\colon\quad u(x) = \lambda \int\limits_C e^{l(x+t)}{}_1F_1(\alpha;\gamma;-2lxt)t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1}u(t)\,dt, \tag{4.32}$$

$$y_2\colon\quad u(x) = \lambda \int\limits_C e^{l(x+t)}{}_1F_1(\alpha-\gamma+1;2-\gamma;-2lxt)x^{1-\gamma}(1-t)^{\delta-1}u(t)\,dt, \tag{4.33}$$

$$y_3\colon\quad u(x) = \lambda \int\limits_C e^{l(x+t)}{}_1F_1(\alpha-\delta+1;\gamma;-2lxt)t^{\gamma-1}(1-x)^{1-\delta}u(t)\,dt, \tag{4.34}$$

$$y_4\colon\quad u(x) = \lambda \int\limits_C e^{l(x+t)}{}_1F_1(\alpha-\gamma-\delta+2;2-\gamma;-2lxt)x^{1-\gamma}(1-x)^{1-\delta}u(t)\,dt \tag{4.35}$$

The contour C is, as before, a Pochhammer double loop encircling the points $t = 0$ and $t = 1$, but it may in many cases be reduced to a simple integral between the points 0 and 1.

Another set of solutions and integral equations may be obtained by changing the sign of l in the preceding work.

4.4. *Generalized Mathieu functions.* Another confluent form of the equation (1.1) is a generalization of Mathieu's equation.

Let $\alpha\beta = k^2a$, and let a tend to infinity while $\alpha+\beta$ remains finite; the equation (1.1) after division by $x(x-1)(x-a)$ becomes

$$u''+\left\{\frac{\gamma}{x}+\frac{\delta}{x-1}\right\}u'-\frac{k^2(x-h)}{x(x-1)}u = 0. \tag{4.41}$$

The same process reduces the differential equation to be satisfied by the nucleus to

$$zv''+\gamma v'-k^2v = 0,$$

where $z = xt$, and solutions of this equation are

$$
\begin{aligned}
v_1 &= z^{\frac{1}{2}(1-\gamma)}J_{1-\gamma}(ikz^{\frac{1}{2}})\\
v_2 &= z^{\frac{1}{2}(1-\gamma)}J_{\gamma-1}(ikz^{\frac{1}{2}}),
\end{aligned}
$$

where J is a Bessel function.

This suggests that solutions of the equation (4.41) should satisfy an integral equation of the form

$$u(x) = \lambda \int_C (xt)^{\frac{1}{2}(1-\gamma)} H^{(1)}_{1-\gamma}(ikx^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}) t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-1} u(t)\, dt, \qquad (4.42)$$

where $H^{(1)}_n(z)$ is a Bessel function of the third kind* defined by the equations

$$H^{(1)}_n(z) = J_n(z) + iY_n(z)$$
$$Y_n(z) = \{J_n(z)\cos n\pi - J_{-n}(z)\}\operatorname{cosec} n\pi.$$

In fact, when $\gamma = \frac{1}{2}$, the equation (4.41) becomes the associated Mathieu equation in its algebraic form, and the integral equation becomes

$$u(x) = \lambda \int_C e^{ik\sqrt{(xt)}} t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\delta-1} u(t)\, dt.$$

Writing $x = \cos^2 z$, $t = \cos^2\theta$, this last equation becomes, when $\Re(\delta) > 0$,

$$\omega(z) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\cos z\cos\theta} \sin^{2\delta-1}\theta\, \omega(\theta)\, d\theta,$$

and this integral equation is satisfied by certain periodic solutions of the associated Mathieu equation.†

* Watson, *Bessel Functions* (Cambridge, 1922), 73.

† Ince, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 41 (1922), 94.

/ ON VAN DER CORPUT'S METHOD AND THE ZETA-FUNCTION OF RIEMANN (IV)

By E. C. TITCHMARSH (*Oxford*)

[Received 18 January 1934]

1. In this paper I consider a problem concerning the zeros of the Riemann zeta-function. It involves consideration of sums of the general type considered in this series, and a knowledge of paper I* as far as § 3.2 is assumed.

The approximate functional equation for the Riemann zeta-function is

$$\zeta(s) = \sum_{n<x} \frac{1}{n^s} + \chi(s) \sum_{n<y} \frac{1}{n^{1-s}} + O(x^{-\sigma}) + O(y^{\sigma-1}|t|^{\frac{1}{2}-\sigma}), \tag{1}$$

where $2\pi xy = |t|$, and $\chi(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s)/\Gamma(\frac{1}{2}s)$. In the case $\sigma = \frac{1}{2}$ we have $|\chi(\frac{1}{2}+it)| = 1$, and we write

$$\chi(\tfrac{1}{2}+it) = e^{-2i\vartheta}.$$

Taking $x = y$, and multiplying by $e^{i\vartheta}$, we obtain

$$f(t) = e^{i\vartheta}\zeta(\tfrac{1}{2}+it) = \sum_{n=1}^{k} \frac{\cos(\vartheta - t\log n)}{\sqrt{n}} + O(t^{-\frac{1}{4}}), \tag{2}$$

where $k = [\sqrt{(|t|/2\pi)}]$. This formula was known to Riemann.†

The function $\vartheta = \vartheta(t)$ is a steadily increasing function of t, and it follows from Stirling's formula that $\vartheta \sim \frac{1}{2}t\log t$ as $t \to \infty$. If ν is any positive integer, the equation $\vartheta(t) = \nu\pi$ therefore has just one solution, say t_ν, and t_ν is approximately a multiple of $\nu/\log\nu$. Now (2) gives

$$f(t_\nu) = (-1)^\nu \sum_{n=1}^{k} \frac{\cos(t_\nu \log n)}{\sqrt{n}} + O(t_\nu^{-\frac{1}{4}}). \tag{3}$$

The sum

$$g(t_\nu) = \sum_{n=1}^{k} \frac{\cos(t_\nu \log n)}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{\cos(t_\nu \log 2)}{\sqrt{2}} + \dots$$

consists of the constant term unity and oscillatory terms; and the formula suggests that $g(t_\nu)$ will usually be positive, and hence that

* E. C. Titchmarsh, *Quart. J. of Math.* (Oxford), 2 (1931), 161–73.

† See C. L. Siegel, 'Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie': *Quellen und Studien zur Geschichte der Math. Astr. und Physik, Abteilung B: Studien*, 2 (1932), 45–80.

t) will usually change sign in the interval $(t_\nu, t_{\nu+1})$, and so have a zero in this interval. It is this property, or one substantially equivalent to it, which has been used by Gram, Backlund, and Hutchinson* to verify the reality of the roots of $f(t)$ over a considerable interval. The property that the zeros of $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ and the numbers t_ν separate each other is referred to by Hutchinson as Gram's law. It is not suggested that Gram's law is always true; but it is true for a much longer sequence of values of ν than considerations of probability might lead one to expect. According to Hutchinson's calculations it is true for all values of t_ν less than 300 except for two pairs of adjacent intervals, both lying between $t = 280$ and $t = 300$. In each of these cases the non-existence of a zero in $(t_\nu, t_{\nu+1})$ is compensated for by the occurrence of two zeros in one of the adjacent intervals.

In the present state of knowledge it is not possible to prove anything very conclusive about Gram's law. Here I prove that $(-1)^\nu f(t_\nu)$ is positive on the average, and that $f(t_\nu)f(t_{\nu+1})$ is negative on the average. From the latter result it follows that $f(t_\nu)f(t_{\nu+1})$ is negative in an infinity of cases, i.e. that, in an infinity of cases, the interval $(t_\nu, t_{\nu+1})$ contains a zero of $\zeta(\frac{1}{2}+it)$. In particular we prove Hardy's theorem that $\zeta(s)$ has an infinity of zeros on $\sigma = \frac{1}{2}$; but this proof is not so simple as some of the known proofs.

We conclude with some remarks on the frequency of the occurrence of intervals $(t_\nu, t_{\nu+1})$ with the above property.

2. We have

$$\sum_{\nu=M+1}^{N} g(t_\nu) = \sum_{\nu=M+1}^{N} \sum_{n\leqslant\sqrt{(t_\nu/2\pi)}} \frac{\cos(t_\nu \log n)}{\sqrt{n}}$$

$$= N-M+\sum_{2\leqslant n\leqslant\sqrt{(t_N/2\pi)}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\tau\leqslant t_\nu\leqslant t_N} \cos(t_\nu \log n),$$

where $\tau = \max(t_{M+1}, 2\pi n^2)$. The inner sum is of the form

$$\sum \cos\{2\pi\phi(\nu)\},$$

where

$$\phi(\nu) = \frac{t_\nu \log n}{2\pi},$$

t_ν being defined for all positive values of ν by the equation

$$\vartheta(t_\nu) = \nu\pi.$$

* See § 3.13 of my Cambridge tract, *The Zeta-Function of Riemann.*

Hence
$$\phi'(\nu) = \frac{\log n}{2\pi}\frac{dt_\nu}{d\nu},$$
where
$$\vartheta'(t_\nu)\frac{dt_\nu}{d\nu} = \pi.$$
Now
$$\vartheta'(t) = -\frac{1}{2}\frac{\chi'(\frac{1}{2}+it)}{\chi(\frac{1}{2}+it)} = -\frac{1}{2}\left\{\log\pi - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}it)}{\Gamma(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}it)} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it)}{\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it)}\right\}$$
$$= -\tfrac{1}{2}\log\pi + \tfrac{1}{4}\log(\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{4}t^2) - \frac{1}{1+4t^2} - \mathbf{R}\int_0^\infty \frac{u\,du}{\{u^2+(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it)^2\}(e^{2\pi u}-1)},$$
and it follows that, as $t \to \infty$,
$$\vartheta'(t) = \tfrac{1}{2}\log t - \tfrac{1}{2}\log 2\pi + O(1/t), \qquad \vartheta''(t) \sim \frac{1}{2t}.$$

Hence, if t is large enough, $\vartheta'(t)$ is positive and steadily increasing, and
$$\vartheta'(t) > \tfrac{1}{3}\log t.$$
Hence, if ν is large enough, $\phi'(\nu)$ is positive and steadily decreasing, and
$$\phi'(\nu) = \frac{\log n}{2\vartheta'(t_\nu)} < \frac{3\log n}{2\log t_\nu}.$$

In the above sum $\log t_\nu \geqslant \log 2\pi n^2 > 2\log n$, so that $\phi'(\nu) < \frac{3}{4}$. We may therefore apply Lemma 1 of paper I, in which the constant $\frac{1}{2}$ may clearly be replaced by $\frac{3}{4}$. It follows that, if M is large enough, i.e. τ is large enough,
$$\sum_{\tau \leqslant t_\nu \leqslant t_N} \cos(t_\nu \log n) = \int_{\tau \leqslant t_\nu \leqslant t_N} \cos\{2\pi\,\phi(\nu)\}\,d\nu + O(1).$$
Now
$$\phi'(\nu) \geqslant \frac{\log n}{2\vartheta'(t_N)} > \frac{A\log n}{\log t_N},$$
and hence
$$\int \cos\{2\pi\,\phi(\nu)\}\,d\nu = \int \frac{d\{\sin 2\pi\,\phi(\nu)\}/d\nu}{2\pi\,\phi'(\nu)}\,d\nu = O\left(\frac{\log t_N}{\log n}\right)$$
by the second mean-value theorem. Hence (for a fixed M)
$$\sum_{\nu=M+1}^{N} g(t_\nu) = N - M + O\left\{\log t_N \sum_{2 \leqslant n \leqslant \sqrt{(t_N/2\pi)}} \frac{1}{\sqrt{n}\log n}\right\}$$
$$= N + O(t_N^{\frac{1}{4}})$$
$$= N + O(N^{\frac{1}{4}}\log^{-\frac{1}{4}} N).$$

Hence

$$\sum_{\nu=M+1}^{N}(-1)^{\nu}f(t_\nu) = N+O\left\{\left(\frac{N}{\log N}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}+O\left\{\sum_{M+1}^{N}\left(\frac{\nu}{\log \nu}\right)^{-\frac{1}{4}}\right\}$$
$$= N+O(N^{\frac{3}{4}}\log^{\frac{1}{4}}N),$$

and so

$$\sum_{M+1}^{N}(-1)^{\nu}f(t_\nu) \sim N.$$

Thus $(-1)^{\nu}f(t_\nu)$ is positive on the average.

3. We have next

$$\sum_{\nu=M+1}^{N} g(t_\nu)g(t_{\nu+1}) = \sum_{\nu=M+1}^{N}\sum_{m\leqslant\sqrt{(t_\nu/2\pi)}}\frac{\cos(t_\nu\log m)}{\sqrt{m}}\sum_{n\leqslant\sqrt{(t_{\nu+1}/2\pi)}}\frac{\cos(t_{\nu+1}\log n)}{\sqrt{n}}$$

$$= \sum_{m\leqslant\sqrt{(t_N/2\pi)}}\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{n\leqslant\sqrt{(t_{N+1}/2\pi)}}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\nu=\nu_1}^{N}\cos(t_\nu\log m)\cos(t_{\nu+1}\log n),$$

$$= \frac{1}{2}\sum\frac{1}{\sqrt{m}}\sum\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\cos(t_\nu\log m - t_{\nu+1}\log n)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{\sqrt{m}}\sum\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\cos(t_\nu\log m + t_{\nu+1}\log n) = \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_1+\tfrac{1}{2}\sum_2,$$

say, where ν_1 is the least integer such that $\nu_1 \geqslant M+1$, $t_{\nu_1} \geqslant 2\pi m^2$, and $t_{\nu_1+1} \geqslant 2\pi n^2$.

In $\sum_1$, consider first the terms with $m = n$. These give

$$\sum_{\nu=M+1}^{N}\sum_{m\leqslant\sqrt{(t_\nu/2\pi)}}\frac{1}{m}\cos\{(t_{\nu+1}-t_\nu)\log m\}. \tag{4}$$

Write the inner sum as

$$\sum_{m\leqslant\exp(\sqrt{\log t_\nu})} + \sum_{m>\exp(\sqrt{\log t_\nu})} = \textstyle\sum_3+\sum_4.$$

In $\sum_3$, since $t_{\nu+1}-t_\nu = O(1/\log t_\nu)$,

$$\cos\{(t_{\nu+1}-t_\nu)\log m\} = 1+O\{(t_{\nu+1}-t_\nu)^2\log^2 m\}$$
$$= 1+O\left(\frac{\log^2 m}{\log^2 t_\nu}\right) = 1+O\left(\frac{1}{\log t_\nu}\right).$$

Hence

$$\textstyle\sum_3 = \left\{1+O\left(\frac{1}{\log t_\nu}\right)\right\}\displaystyle\sum_{m\leqslant\exp(\sqrt{\log t_\nu})}\frac{1}{m}$$
$$= \left\{1+O\left(\frac{1}{\log t_\nu}\right)\right\}\{\sqrt{\log t_\nu}+\gamma+O(e^{-\sqrt{\log t_\nu}})\}$$
$$= \sqrt{\log t_\nu}+\gamma+O(\log^{-\frac{1}{2}}t_\nu).$$

Also, since $m^{-1}\cos\{(t_{\nu+1}-t_\nu)\log m\}$ is a steadily decreasing function of m,

$$\sum_4 = \int\limits_{\exp(\sqrt{\log t_\nu})}^{\sqrt{(t_\nu/2\pi)}} \cos\{(t_{\nu+1}-t_\nu)\log x\}\frac{dx}{x}+O(e^{-\sqrt{\log t_\nu}})$$

$$= \frac{\sin\{\frac{1}{2}(t_{\nu+1}-t_\nu)\log(t_\nu/2\pi)\}}{t_{\nu+1}-t_\nu}-\frac{\sin\{(t_{\nu+1}-t_\nu)\sqrt{\log t_\nu}\}}{t_{\nu+1}-t_\nu}+O(e^{-\sqrt{\log t_\nu}}). \quad (5)$$

Now $$t_{\nu+1}-t_\nu = \frac{\pi}{\vartheta'(t_\nu)}+O\left[\frac{\vartheta''(t_\nu)}{\{\vartheta'(t_\nu)\}^3}\right]$$

$$= \frac{\pi}{\frac{1}{2}\log t_\nu-\frac{1}{2}\log 2\pi+O(1/t_\nu)}+O\left(\frac{1}{t_\nu\log^3 t_\nu}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{\log t_\nu}+\frac{2\pi\log 2\pi}{\log^2 t_\nu}+O\left(\frac{1}{\log^3 t_\nu}\right).$$

Hence

$$\sin\left\{\tfrac{1}{2}(t_{\nu+1}-t_\nu)\log\frac{t_\nu}{2\pi}\right\} = \sin\left\{\pi+O\left(\frac{1}{\log^2 t_\nu}\right)\right\} = O\left(\frac{1}{\log^2 t_\nu}\right).$$

Thus the first term on the right of (5) is $O(1/\log t_\nu)$, and the second is

$$\sqrt{\log t_\nu}+O\{(t_{\nu+1}-t_\nu)^2\log^{\frac{3}{2}} t_\nu\} = \sqrt{\log t_\nu}+O(\log^{-\frac{1}{2}} t_\nu).$$

Hence $$\sum_4 = -\sqrt{\log t_\nu}+O(\log^{-\frac{1}{2}} t_\nu),$$

and so $$\sum_3+\sum_4 = \gamma+O(\log^{-\frac{1}{2}} t_\nu),$$

and the sum (4) is equal to

$$N+O(N\log^{-\frac{1}{2}} N).$$

4. In the remainder of $\sum_1$, the ν-sum is of the form

$$\sum\cos\{2\pi\psi(\nu)\},$$

where $$\psi(\nu) = \frac{1}{2\pi}(t_\nu\log m-t_{\nu+1}\log n).$$

Hence

$$\psi'(\nu) = \frac{\log m}{2\vartheta'(t_\nu)}-\frac{\log n}{2\vartheta'(t_{\nu+1})}$$

$$= \frac{\log m}{\log t_\nu-\log 2\pi+O(1/t_\nu)}-\frac{\log n}{\log t_{\nu+1}-\log 2\pi+O(1/t_\nu)}$$

$$= \frac{(\log m-\log n)(\log t_\nu-\log 2\pi)+O\{(\log m)/t_\nu\}}{\log^2 t_\nu\{1+o(1)\}},$$

since $$\log t_{\nu+1}-\log t_\nu = O\left(\frac{t_{\nu+1}-t_\nu}{t_\nu}\right) = O\left(\frac{1}{t_\nu\log t_\nu}\right).$$

Since $$\frac{\log m}{t_\nu} = o\left(\frac{\log t_\nu}{m}\right)$$

for the values of m and ν considered, it follows that

$$\psi'(\nu) = \frac{(\log m - \log n)(\log t_\nu - \log 2\pi)}{\log^2 t_\nu}\{1+o(1)\},$$

where the $o(1)$ may be made less than $\frac{1}{2}$ throughout the range by choice of M. Hence

$$\frac{A|\log(m/n)|}{\log t_\nu} < |\psi'(\nu)| < \tfrac{3}{4}.$$

Hence, by Lemma 1,

$$\sum \cos\{2\pi\psi(\nu)\} = \int \cos\{2\pi\psi(x)\}\,dx + O(1)$$
$$= O\left\{\frac{\log t_N}{|\log(m/n)|}\right\} + O(1),$$

using the second mean-value theorem as in § 2. The contribution of these terms to $\sum_1$ is therefore*

$$O\left\{\log t_N \sum_{m \neq n}\sum \frac{1}{m^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} |\log(m/n)|}\right\} = O(t_N^{\frac{1}{2}} \log^2 t_N).$$

5. In $\sum_2$ the ν-sum is of the form

$$\sum \cos\{2\pi\chi(\nu)\},$$

where
$$\chi(\nu) = \frac{1}{2\pi}(t_\nu \log m + t_{\nu+1} \log n).$$

Hence

$$\chi'(\nu) = \frac{\log m}{2\vartheta'(t_\nu)} + \frac{\log n}{2\vartheta'(t_{\nu+1})}$$
$$= \frac{\log m}{\log t_\nu - \log 2\pi + O(1/t_\nu)} + \frac{\log n}{\log t_{\nu+1} - \log 2\pi + O(1/t_{\nu+1})}$$
$$= \frac{\log m}{\log(t_\nu/2\pi)} + \frac{\log n}{\log(t_{\nu+1}/2\pi)} + O\left(\frac{\log mn}{t_\nu \log^2 t_\nu}\right).$$

Clearly $\chi'(\nu)$ is a steadily decreasing function of ν. Suppose that $m \leqslant n$. Then $t_\nu \geqslant 2\pi n^2$, and we can choose M so large that

$$\chi'(\nu) \leqslant \frac{\log m}{2\log n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2},$$

and in particular $\chi'(\nu) \leqslant \frac{3}{2}$. It therefore follows from Lemma 1 that

$$\sum \cos\{2\pi\,\chi(\nu)\} = \int_{\chi'(x) \leqslant \frac{1}{2}} \cos\{2\pi\,\chi(x)\}\,dx + $$
$$+ \int_{\chi'(x) > \frac{1}{2}} \cos[2\pi\{\chi(x) - x\}]\,dx + O(1).$$

* By the lemma proved in § 2.13 of my Cambridge tract.

Since
$$\chi'(x) \geqslant \frac{A \log n}{\log t_N},$$
the first term on the right is $O\{(\log t_N)/\log n\} = O(\log t_N)$, if $n \geqslant 2$, and this contributes to $\sum_2$
$$O\left(\log t_N \sum_{m \leqslant \surd(t_N/2\pi)} \frac{1}{\surd m} \sum_{n \leqslant \surd(t_N/2\pi)} \frac{1}{\surd n}\right) = O(t_N^{\frac{1}{2}} \log t_N).$$

In the second term
$$\frac{d}{dx}\{x - \chi(x)\} \geqslant 1 - \left(\frac{\log m}{2 \log n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\log m}{\log n} - \frac{1}{n^2}\right).$$
If $n > 2m$, this is greater than
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\log 2}{\log n} - \frac{1}{n^2}\right) > \frac{A}{\log n},$$
and we obtain $O(t_N^{\frac{1}{2}} \log t_N)$ as before.

If $m < n < 2m$, let $n = m+r$. Then
$$\frac{d}{dx}\{x - \chi(x)\} \geqslant \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{\log(n-r)}{\log n} - \frac{1}{n^2}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\log(1-r/n)}{\log n} - \frac{1}{n^2}\right\}$$
$$> \frac{r}{2n \log n} - \frac{1}{2n^2} > \frac{Ar}{m \log(m+1)}.$$
Hence these terms contribute to $\sum_2$
$$O\left\{\sum_{m \leqslant \surd(t_N/2\pi)} \frac{1}{\surd m} \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{\surd m} \frac{m \log(m+1)}{r}\right\} = O(t_N^{\frac{1}{2}} \log^2 t_N).$$

A similar argument applies to the terms with $n < m$. Next, if $n = m$,
$$\chi''(\nu) = -\tfrac{1}{2}\pi \log m \left[\frac{\vartheta''(t_\nu)}{\{\vartheta'(t_\nu)\}^3} + \frac{\vartheta''(t_{\nu+1})}{\{\vartheta'(t_{\nu+1})\}^3}\right]$$
$$< -\frac{A \log m}{t_\nu \log^3 t_\nu} < -\frac{A \log m}{t_N \log^3 t_N}.$$
Hence, by Lemma 2 of I,
$$\int \cos[2\pi\{\chi(x) - x\}]\, dx = O\left(\frac{t_N^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{3}{2}} t_N}{\log^{\frac{1}{2}} m}\right),$$

and
$$\sum_{2\leqslant m\leqslant\sqrt{(t_N/2\pi)}}\frac{t_N^{\frac{1}{4}}\log^{\frac{3}{2}}t_N}{m\log^{\frac{1}{2}}m}=O(t_N^{\frac{1}{4}}\log^2 t_N).$$
Finally, if $m=n=1$, $\chi(\nu)=0$, and this part of $\sum_2$ is
$$N+O(1).$$
Altogether we obtain
$$\sum_{\nu=M+1} g(t_\nu)g(t_{\nu+1})=(\tfrac{1}{2}\gamma+\tfrac{1}{2})N+o(N).$$
Since $\zeta(\frac{1}{2}+it)=O(t^{\frac{1}{6}}\log t)$,
$$|g(t_\nu)|\leqslant|\zeta(\tfrac{1}{2}+it_\nu)|+O(t_\nu^{-\frac{1}{4}})=O(t_\nu^{\frac{1}{6}}\log t_\nu).$$
Hence
$$\sum_{\nu=M+1}^{N} f(t_\nu)f(t_{\nu+1})=\sum_{\nu=M+1}^{N}\{(-1)^\nu g(t_\nu)+O(t_\nu^{-\frac{1}{4}})\}\{(-1)^{\nu+1}g(t_{\nu+1})+O(t_{\nu+1}^{-\frac{1}{4}})\}$$
$$=-\sum_{\nu=M+1}^{N}\{g(t_\nu)g(t_{\nu+1})+O(t_\nu^{-\frac{1}{12}}\log t_\nu)\}$$
$$\sim-(\tfrac{1}{2}\gamma+\tfrac{1}{2})N.$$
Thus $f(t_\nu)f(t_{\nu+1})$ is negative on the average. In particular, for an infinity of values of ν the interval $(t_\nu,t_{\nu+1})$ contains a zero of $\zeta(\frac{1}{2}+it)$.

6. Let N' be the number of negative terms in the sum
$$\sum_{\nu=M+1}^{N} f(t_\nu)f(t_{\nu+1}).$$
Then
$$AN<N'\max|f(t_\nu)f(t_{\nu+1})|<AN'(t_{N+1}^{\frac{1}{6}}\log t_{N+1})^2<AN'N^{\frac{1}{3}}\log^{\frac{5}{3}}N,$$
i.e.
$$N'>AN^{\frac{2}{3}}\log^{-\frac{5}{3}}N.$$
If $G(T)$ is the number of intervals in $(0,T)$ for which $(t_\nu,t_{\nu+1})$ contains a zero of $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, it follows that
$$G(T)>AT^{\frac{2}{3}}/\log T.$$

Another method which might lead to more precise results is as follows. Let $\sum'$ denote a sum taken over values of ν for which $f(t_\nu)f(t_{\nu+1})$ is negative. Then
$$AN<\sum_{\nu=M+1}^{N}\{-f(t_\nu)f(t_{\nu+1})\}\leqslant\sum{}'\{-f(t_\nu)f(t_{\nu+1})\}$$
$$\leqslant[\sum{}' 1\sum{}'\{f(t_\nu)f(t_{\nu+1})\}^2]^{\frac{1}{2}}\leqslant N'^{\frac{1}{2}}\Big[\sum_{\nu=M+1}\{f(t_\nu)f(t_{\nu+1})\}^2\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

The last sum is rather like that which arises in the problem of the mean value of $|\zeta(\frac{1}{2}+it)|^4$, which suggests that it should be $O(N\log^4 N)$; but there are additional complications, and the conjecture has not been verified.

SUR L'ALLURE ASYMPTOTIQUE DE LA SUITE DES ITÉRÉS D'UN NOYAU DE FREDHOLM

Par MAURICE FRÉCHET (*Paris*)

[Received 15 February 1934]

EXISTENCE ET CALCUL D'UNE LIMITE GÉNÉRALISÉE DES NOYAUX ITÉRÉS DE FREDHOLM DANS LE CAS BORNÉ GÉNÉRAL

Position du problème

DANS la théorie des probabilités continues 'en chaîne', on a à étudier le comportement quand n croît, d'une 'densité de probabilité' $P^{(n)}(E, F)$, c'est-à-dire d'une fonction de n et de deux points E, F d'une région fixe V d'un certain espace à un nombre fini et déterminé de dimensions. Par hypothèse:

(i) *il y a une probabilité déterminée pour que le point E passe après n épreuves à une position située dans une portion v de V;*

(ii) *cette probabilité est représentable par l'intégrale*

$$\int_v P^{(n)}(E, F)\, dF$$

(qui est une intégrale multiple si v est à plus d'une dimension).

On prouve que *l'on a*

$$\left.\begin{aligned} &\text{(I)}\quad P^{(n+n')}(E, F) = \int_V P^{(n)}(E, G) P^{(n')}(G, F)\, dG \\ &\text{(P)}\quad P^{(n)}(E, F) \geqslant 0 \\ &\text{(T)}\quad \int_V P^{(n)}(E, F)\, dF = 1. \end{aligned}\right\}$$

L'équation d'itération (I) montre que $P^{(n)}(E, F)$ n'est autre que le noyau itéré au sens de Fredholm du noyau $P^{(1)}(E, F)$, que l'on peut représenter plus simplement par $p(E, F)$.

Le problème à résoudre, *en théorie des probabilités*, consiste à étudier quel est le comportement, quand n est grand, des noyaux itérés n fois à partir d'un noyau *satisfaisant aux conditions* (P) et (T).

Mais, si l'on fait abstraction de ces deux conditions, le même problème se pose dans la théorie des équations intégrales.

C'est donc le comportement, quand n croît, des itérés d'un *noyau quelconque* qui va nous occuper. Pour mettre mieux en évidence la

généralisation, nous recourrons aux notations habituelles de Fredholm; nous appellerons: $K_1(M, P)$, $K_2(M, P)$,..., $K_n(M, P)$... la suite des noyaux itérés, en posant:

$$\boxed{\begin{aligned} K_{n+n'}(M, P) &= \int_V K_n(M, Q) K_{n'}(Q, P)\, dQ \\ K(M, P) &\equiv K_1(M, P). \end{aligned}} \tag{1}$$

Toutefois pour éviter certaines complications, *nous nous placerons dans tout le cours de ce mémoire dans le cas où les noyaux itérés sont bornés à partir d'un certain rang (sans avoir nécessairement la même borne) sur le domaine V d'intégration supposé borné.**

De plus nous examinerons les simplifications qui se produisent quand les noyaux itérés sont continus à partir d'un certain rang.

Remarque. Il existe des noyaux assez simples, pour lesquels l'équation de Fredholm peut être complètement résolue, et dont pourtant aucun itéré n'est continu, ni même borné; tel est l'exemple de Schmidt:

$$K(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x}} \qquad \text{sur l'intervalle } (0, 1).$$

On voit aisément que dans ce cas on a d'une façon générale

$$K_n(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x}}$$

toujours très grand, quel que soit n, pour x petit.

Cependant, d'autres exemples, bien connus, montrent que l'itération a, en général, pour effet de régulariser les discontinuités. De sorte qu'on étend la théorie de Fredholm à la grande majorité des cas pratiques en établissant sa validité pour les noyaux dont les itérés sont individuellement bornés à partir d'un certain rang sur un domaine borné.

C'est toujours dans ce cas que nous nous placerons dans la suite. Sous ces hypothèses, les séries convergentes qui interviendront seront fréquemment uniformément convergentes; elles auront même fréquemment une *convergence normale*, c'est-à-dire qu'elles seront majorées en valeur absolue par des séries convergentes à termes constants. (Nous utiliserons par la suite, toutes les fois qu'il y aura lieu, cette dénomination plus précise introduite par Baire.)

* Bien entendu, nous supposerons aussi constamment que le noyau $K(M, P)$ et l'ensemble V sont mesurables. On supposera même que V est un domaine, c'est-à-dire un ensemble fermé dont tout point est limite de points intérieurs.

Pour faciliter la compréhension du texte, nous préciserons les emprunts que nous ferons à la partie classique de la théorie des équations intégrales, en renvoyant à chaque fois, sous la forme (G., p. ...) au magistral exposé de cette théorie qu'on trouve au tome iii du *Cours d'analyse mathématique* de M. Goursat (2e édition, 1915).

Dans un mémoire séparé et plus court,* nous appliquerons les résultats obtenus ici à la théorie des probabilités continues 'en chaîne'.

REMARQUE. Il y a lieu d'observer que les noyaux itérés peuvent être bornés ou même continus à partir d'un certain rang, quand le noyau donné, non seulement n'est ni continu ni même borné, mais même quand il peut devenir infini en certains points.

Dans ces conditions, le déterminant de Fredholm $D(\lambda)$ peut n'avoir pas de sens; on devra donc ne pas s'étonner si certains des résultats concernant les probabilités discontinues, et où intervient un déterminant analogue à celui de Fredholm, n'ont point de parallèles immédiats dans le cas des probabilités géométriques. Cependant, on retrouvera une correspondance complète, soit en examinant le cas plus particulier où le noyau donné est lui-même borné (sur le domaine d'intégration V supposé borné), soit en modifiant convenablement la définition de l'ordre de multiplicité d'une racine de $D(\lambda)$ comme on le fera page 137.

Nous allons maintenant en arriver à notre problème.

En général, il n'a pas été nécessaire d'innover dans le détail des démonstrations. La plupart de celles qui ont été développées ici s'imposent presque d'elles-mêmes quand on a décidé du problème à résoudre et de la méthode à employer. La contribution que nous apportons doit donc être cherchée ici plutôt dans les résultats que dans les méthodes. En ce qui concerne l'application aux probabilités, elles permettent de formuler des conditions nécessaires et suffisantes complétant utilement les résultats antérieurement connus. D'autre part, en ce qui regarde la théorie des équations intégrales, si la plupart des moyens nécessaires à l'étude de l'allure asymptotique des noyaux itérés se trouvaient déjà connus, du moins, cette étude n'avait pas été entreprise, à notre connaissance. Et l'application que nous ferons aux probabilités dans un autre mémoire* montrera que l'absence de cette étude constituait une lacune de la théorie, lacune qu'il convenait de combler.

Bien qu'une partie de ce mémoire consiste ainsi en une mise au point

* 'Sur l'allure asymptotique des densités itérées dans le problème des probabilités "en chaîne",' *Bull. Soc. Math. France*, 62 (1934).

et en des déductions de conséquences directes de travaux antérieurs, *il n'en contient pas moins des résultats de nature tout à fait nouvelle.*

La suite des quantités itérées n'est en général ni convergente, ni même formée de valeurs bornées dans leur ensemble. Un des résultats du premier chapitre de ce mémoire auquel nous attachons le plus de prix consiste à établir que cette suite converge, au sens de Cesàro, *dans tous les cas* où les quantités itérées sont bornées dans leur ensemble à partir d'un certain rang, et à indiquer comment on peut en calculer la limite généralisée. La convergence généralisée a lieu pour les probabilités continues comme pour les probabilités discontinues où nous l'avions précédemment observée, dans notre mémoire de Pise. Elle subsiste même pour des quantités itérées sans rapport avec la théorie des probabilités, *pourvu* que ces quantités restent bornées dans leur ensemble au moins à partir d'un certain rang.

Ce résultat, intéressant en lui-même, permet, de plus, de préciser la discussion et, en particulier, de donner dans l'application aux probabilités une signification séparée aux deux conditions qui caractérisent 'le cas régulier'.

Ce même résultat ne s'interprète d'ailleurs pas seulement du point de vue analytique. C'est ainsi que la valeur moyenne de la fréquence d'un événement est précisément une de ces moyennes arithmétiques qui, au sens de Cesàro, remplacent la quantité itérée dont on cherche la limite.

L'objet du présent mémoire a été celui d'une partie de mon cours à l'Institut Henri Poincaré au Premier Semestre 1932–3. Le texte actuel est à peu de chose près celui des notes recueillies par l'un de mes auditeurs, M. Combes, à qui j'adresse ici tous mes remerciements.

Un résumé des résultats obtenus ici a été publié sous le titre: 'On the behaviour of the nth iterate of a Fredholm kernel as n becomes infinite'.*

Toutefois, j'ai pu étendre ici au cas des noyaux bornés à la longue les résultats limités dans la note de Washington au cas des noyaux continus à la longue.

Allure asymptotique de $K_n(M, P)$ quand n croît

Remarquons tout d'abord que ce problème a été résolu dans certains cas, plus exactement dans les cas de Liouville† et de

* *Proc. Nat. Acad. Sc. Washington*, 18 (1932), 671.

† C'est-à-dire si K, ou l'un de ses itérés, reste en module au plus égal à un nombre fixe $< 1/V$.

Schmidt.* On sait, en effet (G., p. 348), que dans ces deux cas la suite des noyaux itérés converge uniformément vers zéro.

Étude du cas général. La résolution du problème qu'il s'agit d'étudier semblerait plus facile à aborder si l'on connaissait, comme dans le cas de l'itération algébrique, l'expression explicite de $K_n(M, P)$ en fonction de n, mais une telle expression ne semble pas avoir été obtenue pour un noyau quelconque. On en connaît des expressions intéressantes comme dans le cas où le noyau est une fonction symétrique, c'est-à-dire si

$$K(M, P) \equiv K(P, M).$$

On démontre alors que $K_n(M, P)$ est de la forme

$$K_n(M, P) = \sum_p \frac{\phi_p(M)\,\phi_p(P)}{(\lambda_p)^n} \qquad (n \geqslant 2),$$

λ_p étant une constante fondamentale de K, et $\phi_p(M)$ une fonction fondamentale correspondante.

Un cas beaucoup plus intéressant pour notre problème actuel est celui où $K(M, P)$ est un 'noyau principal' dont nous rappellerons plus loin la définition et pour lequel on peut donner l'expression explicite de K_n en fonction de n. Nous verrons, en effet, que *le comportement d'un noyau itéré quelconque est le même que celui de la somme des itérés d'un nombre fini de certains des noyaux principaux.* Il en résulte que la solution, qui reste désirable, du problème de la représentation explicite en fonction de n du $n^{\text{ième}}$ itéré d'un noyau quelconque, n'apporterait aucune simplification à la solution que nous allons donner du problème actuel: comportement d'un tel itéré, quand n croît. Nous tenons à insister sur ce que: *si nous avons pu nous passer de l'expression effective de K_n, c'est grâce à la théorie des noyaux orthogonaux due à MM. Goursat, Heywood et Lalesco.*

Avant de nous occuper des noyaux principaux, nous allons montrer d'abord que l'on peut majorer utilement la suite des K_n.

Majoration d'un noyau itéré quelconque. Considérons un noyau $K(M, P)$ quelconque défini sur un domaine V borné, et supposons que les itérés de rang $\geqslant m$ soient bornés quand M et P varient indépendamment sur V; on suppose donc que

$$|K_m| \leqslant Q_m \quad \text{quand } M \text{ et } P \text{ varient sur } V,$$

* C'est-à-dire si $\int_V \int_V K^2(M,P)\, dMdP < 1$, ou plus généralement si, pour une valeur au moins du rang n, $\int_V \int_V [K_n(M,P)]^2\, dMdP < 1$.

et plus généralement

$$|K_n| \leqslant Q_n \qquad (n \geqslant m).$$

La théorie classique de Fredholm permet d'obtenir une limitation de l'ordre de grandeur de $K_n(M, P)$ quand on connaît le plus petit, ρ_0 (nécessairement positif), des modules des constantes fondamentales λ_j de $K(M, P)$. (Dans le cas où K n'a pas de constantes fondamentales, on pourra supposer ρ_0 infini.)

Désignons par $\Delta(\mu)$, $\Delta(M, P, \mu)$, $\mathfrak{K}(M, P, \mu)$ les deux déterminants de Fredholm et la résolvante, relatifs au noyau $K_m(M, P)$; on a

$$\mathfrak{K}(M, P, \mu) = \frac{\Delta(M, P, \mu)}{\Delta(\mu)}.$$

D'autre part, nous savons que les constantes fondamentales de K_m sont toutes les puissances $m^{\text{ièmes}}$, $(\lambda_j)^m$, des constantes fondamentales λ_j de $K(M, P)$ (G., p. 399); leur borne inférieure, en module, sera donc ρ_0^m, de sorte que ρ étant un nombre fixe inférieur à ρ_0, nous aurons

$$|\Delta(\mu)| \neq 0 \qquad (|\mu| \leqslant \rho^m < \rho_0^m).$$

Dans ces conditions, nous aurons même, $\epsilon(\rho)$ étant une fonction dépendant uniquement de ρ,

$$|\Delta(\mu)| > \epsilon(\rho) \qquad (|\mu| \leqslant \rho^m).$$

Considérons maintenant le déterminant de Fredholm $\Delta(M, P, \mu)$; nous savons (G., p. 372) que la série $|\mu| . |\Delta(M, P, \mu)|$ est majorée par la série entière suivante. On a:

$$|\mu|\,|\Delta(M, P, \mu)| \leqslant \sum_p |\mu| \frac{(Q_m)^{p+1}}{p!} V^p (p+1)^{\frac{1}{2}(p+1)} |\mu|^p = |\mu| Q_m \mathfrak{F}(Q_m V |\mu|),$$

où Q_m est une borne supérieure de $|K_m(M, P)|$ quand M et P varient sur V, et où on a posé

$$\mathfrak{F}(z) = \sum_p z^p \frac{(p+1)^{\frac{1}{2}(p+1)}}{p!}.$$

Si, alors, nous supposons $|\mu| \leqslant \rho$, on voit que l'on a

$$|\mu| Q_m \mathfrak{F}(Q_m\, |V|\mu|) \leqslant \rho Q_m \mathfrak{F}(Q_m V \rho) = \omega(\rho).$$

Cela étant, on a

$$|\mu\, \mathfrak{K}(M, P, \mu)| = \left|\mu \frac{\Delta(M, P, \mu)}{\Delta(\mu)}\right| \leqslant \frac{\omega(\rho)}{\epsilon(\rho)}.$$

Mais on a $$\mu \mathfrak{K}(M, P, \mu) = \sum \mu^s K_{sm}(M, P).$$

On a donc en définitive

$$\left|\sum_s \mu^s K_{sm}(M, P)\right| \leqslant \frac{\omega(\rho)}{\epsilon(\rho)} \qquad (|\mu| \leqslant \rho^m < \rho_0).$$

En vertu des propriétés des fonctions holomorphes, on a pour le coefficient de μ^s dans le développement en série de Maclaurin de la fonction $\mu\mathfrak{K}(M, P, \mu)$ holomorphe en μ pour $|\mu| \leqslant \rho^m$

$$|K_{sm}(M, P)| \leqslant \frac{\omega(\rho)}{\epsilon(\rho)} \left(\frac{1}{\rho^m}\right)^s.$$

De sorte que l'on a la formule

$$|K_{sm}(M,P)| \leqslant \frac{g_0(\rho)}{\rho^{sm}} \qquad (\rho < \rho_0),$$

la fonction

$$g_0(\rho) = \frac{\omega(\rho)}{\epsilon(\rho)}$$

étant indépendante de M et P.

Mais ceci ne nous donne une limitation que pour les noyaux itérés dont l'indice est un multiple de m. Nous allons maintenant passer aux itérés d'indices quelconques.

Soit l'itéré $\qquad K_n(M,P)$ avec $n \geqslant m$;

soit s le quotient de n par m et r le reste, on a

$$n = sm+r \qquad 0 \leqslant r < m$$

et

$$sm \leqslant n < (s+1)m.$$

Écrivons alors:

$$K_n(M,P) = \int\limits_V K_{r+m}(M,Q)K_{(s-1)m}(Q,P)\,dQ.$$

On a $r+m \geqslant m$; donc K_{r+m} est borné et a pour borne Q_{r+m}. On voit alors facilement que l'on a

$$|K_n(M,P)| \leqslant Q_{r+m}\frac{g_0(\rho)}{\rho^{(s-1)m}}V = Q_{r+m}V\rho^{r+m}\frac{g_0(\rho)}{\rho^{sm+r}}.$$

Donc

$$|K_n(M,P)| \leqslant g_r'(\rho)\frac{1}{\rho^n} \qquad (n \geqslant m)$$

en posant

$$g_r'(\rho) = Q_{r+m}V\rho^{r+m}g_0(\rho).$$

Or, r ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, savoir celles allant de 0 à $m-1$; nous aurons ainsi un certain nombre fini de fonctions $g_0'(\rho), g_1'(\rho),..., g_{m-1}'(\rho)$; soit $g(\rho)$ la plus grande de ces fonctions. On a alors

$$|K_n(M,P)| \leqslant g(\rho)\frac{1}{\rho^n} \qquad (n \geqslant m).$$

En définitive, *sous les hypothèses faites,*

(à savoir:

(i) le noyau $K(M,P)$ est défini sur un domaine V borné;

(ii) les itérés de $K(M,P)$ sont chacun bornés sur V à partir d'un certain rang m)

il existe une fonction $g(\rho)$ indépendante de M et P, telle que pour $n \geqslant m$, on ait

$$\boxed{|K_n(M,P)| \leqslant \frac{g(\rho)}{\rho^n} \qquad (\rho < \rho_0).} \tag{2}$$

Telle est la limitation que nous voulions obtenir.

On peut aussi déduire du résultat précédent que

$$\boxed{Q_n \leqslant \frac{g(\rho)}{\rho^n} \qquad (n \geqslant m).} \tag{2 bis}$$

En résumé, nous voyons que l'on peut énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME. *La suite des noyaux itérés (sous les hypothèses déjà vues) est majorée, à partir du rang m, par une progression géométrique pour laquelle on peut prendre comme raison n'importe quel nombre $1/\rho$ tel que $\rho < \rho_0$, ρ_0 étant le plus petit module des constantes fondamentales du noyau $K(M, P)$ initial.*

REMARQUE. Nous avons établi la formule de limitation de K_n ci-dessus, (2 bis), pour $\rho < \rho_0$; nous allons voir que l'on ne peut étendre cette formule, même en changeant la fonction $g(\rho)$, pour $\rho > \rho_0$. Pour cela nous allons démontrer la réciproque du théorème ci-dessus.

THÉORÈME RÉCIPROQUE. *Si la suite des noyaux itérés $K_n(M, P)$ est, à partir d'un certain rang, majorée pour chaque valeur de r telle que $0 < r < r_0$, par une progression géométrique (convergente ou divergente) de raison $1/r$ à termes indépendants de M et P (mais dont le premier terme dépend en général de r); alors toutes les constantes fondamentales de $K(M, P)$ sont, en module, supérieures ou égales à r_0, c'est-à-dire que l'on a*

$$r_0 \leqslant \rho_0.$$

Si nous démontrons ceci, nous aurons bien démontré que l'on ne peut pas étendre notre formule de limitation au delà de ρ_0.

Supposons donc que l'on ait

$$|K_n(M, P)| \leqslant \frac{h(r)}{r^n}$$

et ce, à partir d'un certain rang, éventuellement variable avec r. Dans ces conditions, on voit que la série qui représente la fonction $\mu\mathfrak{K}(M, P, \mu)$, c'est-à-dire la série $\sum_s \mu^s K_{sm}(M, P)$ sera majorée par la série

$$\sum_s |\mu|^s \frac{h(r)}{r^{sm}} = h(r) \sum_s \left(\frac{|\mu|}{r^m}\right)^s.$$

Le deuxième membre est une progression géométrique de raison $|\mu|/r^m$. Donc, si $|\mu|/r^m < 1$, cette progression géométrique sera convergente; dans ce cas la résolvante est développable en une série entière en μ, et, d'après ce qui précède, cette résolvante est une fonction de μ, holomorphe pour $|\mu| < r^m$. Or nous savons que cette

résolvante a comme pôles, les puissances $m^{\text{ièmes}}$ des constantes fondamentales de $K(M, P)$, donc ces pôles seront nécessairement de modules au moins égaux à r^m. On a donc

$$\rho_0^m \geqslant r^m,$$

et, comme on a supposé que r est un nombre arbitraire $< r_0$, il en résulte bien

$$(\rho_0)^m \geqslant r_0^m$$

et on a bien

$$r_0 \leqslant \rho_0.$$

Le théorème sur le comportement de K_n peut s'appliquer, soit aux noyaux itérés, soit *à leurs bornes supérieures Q_n*.

Si ρ_0 est le plus petit des modules des constantes fondamentales de $K(M, P)$, on a, comme on l'a vu, à partir d'un certain rang

$$Q_n \leqslant \frac{g(\rho)}{\rho^n} \quad \text{en supposant} \quad \rho < \rho_0.$$

Donc, si on considère la série $S = \sum \lambda^n Q_n$, on aura

$$\sum_{n \geqslant m} \lambda^n Q_n \leqslant g(\rho) \sum_{n \geqslant m} \frac{|\lambda|^n}{\rho^n}.$$

C'est-à-dire que les termes de la série du premier membre seront, à partir du rang où ces termes sont finis, au plus égaux aux termes correspondants de la série du second membre.

La série du second membre, ci-dessus, est convergente pour $|\lambda| < \rho$; donc le rayon de convergence r_0 de la série S est supérieur ou égal à ρ. Comme on peut prendre pour ρ tout nombre inférieur à ρ_0, on en déduit $r_0 \geqslant \rho_0$. D'autre part, le rayon de convergence de la série S étant égal à r_0, on sait que cette série est convergente pour $|\lambda| = r < r_0$ et par conséquent la série $\sum r^n Q_n$ sera convergente. Ses termes tendront vers zéro et seront tous, à partir d'un certain rang, inférieurs à un même nombre ; on aura, par exemple,

$$r^n Q_n \leqslant M(r).$$

D'où, à partir d'un certain rang,

$$Q_n \leqslant \frac{M(r)}{r^n},$$

et ceci quel que soit $r < r_0$. Or, on a démontré (Théorème réciproque) que, dans ces conditions, on avait

$$r_0 \leqslant \rho_0.$$

En résumé, on a $r_0 = \rho_0$.

THÉORÈME. *Soit Q_n la borne supérieure de $|K_n(M, P)|$ quand M et*

P varient sur V: alors le plus petit module ρ_0 des constantes fondamentales de $K(M, P)$ est égal au rayon de convergence r_0 de la série entière $\sum \lambda^n Q_n$ (en supprimant les termes de rang $n < m$ pour lesquels Q_n est infini).

Nous allons appliquer les résultats précédents à deux cas particuliers.

I. Le noyau $K(M, P)$ n'a pas de constantes fondamentales.

Dans ce cas, on peut supposer que ρ_0 est infini, et le résultat précédent est valable quel que soit ρ. La réciproque de notre théorème est alors ici:

RÉCIPROQUE. *Si la suite des noyaux itérés $K_n(M, P)$ est, à partir d'un certain rang, majorée par une progression géométrique indépendante de M et P et, si l'on peut prendre pour raison n'importe quel nombre $\rho > 0$, le noyau $K(M, P)$ n'a pas de constantes fondamentales.*

II. Le noyau $K(M, P)$ a des constantes fondamentales qui sont toutes de module supérieur à 1.

Dans ce cas, on a alors $\rho_0 > 1$: on peut donc prendre ρ tel que

$$1 < \rho < \rho_0.$$

Dans ces conditions, on a $1/\rho < 1$ et $Q_n \to 0$ en même temps que $1/n$, puisque

$$Q_n < \frac{g(\rho)}{\rho^n} \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

THÉORÈME. *Lorsque les itérés $K_n(M, P)$ sont chacun bornés à partir d'un certain rang, et que les constantes fondamentales de $K(M, P)$ sont toutes de module supérieur à l'unité, la suite des itérés $K_n(M, P)$ converge uniformément vers zéro. La convergence est même normale et, plus précisément, cette suite est majorée par une progression géométrique convergente, à termes indépendants de M et P, de raison $1/\rho$, ρ étant n'importe quel nombre compris entre l'unité et le plus petit des modules des constantes fondamentales de $K(M, P)$.*

Réciproquement, si K_n converge uniformément vers zéro, Q_n converge vers zéro, et la série $\sum Q_n \lambda^n$ a un rayon de convergence r_0 infini ou $\geqslant 1$. Par suite, ou bien il n'y a pas de constantes fondamentales ou bien elles sont toutes en module $\geqslant 1$. Donc $\rho_0 \geqslant 1$; on va même voir que $\rho_0 > 1$. Autrement dit, nous allons maintenant montrer que les cas particuliers I et II sont les cas les plus généraux où la suite des K_n converge uniformément vers zéro. Auparavant nous ferons une observation:

Remarque. *Toute solution fondamentale absolument intégrable d'un noyau $K(M, P)$, dont l'un K_m des itérés est borné, est aussi bornée.*

En effet, soit $\phi(M)$ une fonction fondamentale, absolument intégrable, de $K(M, P)$ correspondant à la constante fondamentale C, nous savons alors que C^m est constante fondamentale du noyau $K_m(M, P)$ et que $\phi(M)$ est fonction fondamentale, correspondant à C^m, du même noyau. On a alors

$$\phi(M) = C^m \int_V K_m(M, P)\phi(P)\, dP.$$

Or la borne supérieure Q_m de $|K_m|$ est finie. Donc

$$|\phi(M)| \leqslant C^m Q_m \int_V |\phi(P)|\, dP.$$

Le deuxième membre de cette inégalité étant indépendant de M, on en déduit bien que $\phi(M)$ est borné si $|\phi(M)|$ est une fonction intégrable sur V.

Cela étant établi, supposons donc que la suite des itérés K_n converge uniformément vers zéro et supposons aussi qu'il y ait au moins une constante fondamentale C pour le noyau $K(M, P)$. Soit $\phi(M)$ une fonction fondamentale de $K(M, P)$ relative à C, on a donc

$$\phi(M) = C^n \int_V K_n(M, P)\phi(P)\, dP \qquad (n > m).$$

Par hypothèse, $\phi(M)$ est solution fondamentale, c'est-à-dire n'est pas identiquement nulle; il y a donc au moins un point M_0 tel que $\phi(M_0) \neq 0$, et par suite on a (K_n étant borné puisque $n > m$)

$$\left|\frac{1}{C}\right|^n \leqslant \frac{1}{|\phi(M_0)|}\, Q_n \int_V |\phi(P)|\, dP.$$

Or, d'après l'hypothèse, $Q_n \to 0$ avec $1/n$, donc $|1/C|^n \to 0$. Il faut donc avoir

$$\left|\frac{1}{C}\right| < 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad |C| > 1.$$

Ce qui nous montre bien que si la suite des Q_n (ou des K_n) converge uniformément vers zéro, toute constante fondamentale de $K(M, P)$ est, en module, supérieure à 1.

Ainsi nous venons d'obtenir *la condition nécessaire et suffisante pour que la suite des $K_n(M, P)$ converge uniformément vers zéro* (les K_n étant toujours bornés à la longue); et cette condition est:

(i) *ou bien $K(M, P)$ n'a pas de constantes fondamentales*;

(ii) *ou bien, s'il y en a, elles sont toutes, en modules, supérieures à* 1.

Nous allons maintenant passer à l'étude du cas opposé, celui où les Q_n ne sont pas bornés, mais auparavant nous ferons une observation.

REMARQUE. Supposons que tous les itérés $K_n(M, P)$ (toujours bornés à la longue) soient, à partir d'un certain rang, bornés, en valeur absolue, par un même nombre (on exprime ce fait en disant qu'ils sont *également bornés*). Autrement dit, il existe un nombre Q indépendant de M et P tel que

$$\boxed{|K_n(M, P)| \leqslant Q \qquad (n \geqslant m).}$$

Considérons alors la série $\lambda\mathfrak{R}(M, P, \lambda) = \sum \lambda^n K_n$; on aura

$$\lambda\mathfrak{R}(M, P, \lambda) = \sum \lambda^n K_n \ll \sum |\lambda|^n Q = Q\frac{1}{1-|\lambda|}.$$

La série $1/(1-|\lambda|)$ est convergente pour $|\lambda| < 1$; donc la série $\lambda\mathfrak{R}$ est holomorphe pour $|\lambda| < 1$. Par suite:

THÉORÈME. *Si les itérés $K_n(M, P)$ sont, à partir d'un certain rang, également bornés, toutes les constantes fondamentales de $K(M, P)$ sont, en module, supérieures ou égales à l'unité.*

Inversement on peut déduire de là que:

Si l'une au moins des constantes fondamentales de $K(M, P)$ est, en module, inférieure à l'unité, on n'est certainement pas dans le cas précédent, et les itérés $K_n(M, P)$ ne sont pas également bornés à partir d'un certain rang.

On a donc le théorème:

THÉORÈME. *Si l'une au moins des constantes fondamentales de $K(M, P)$ est, en module, inférieure à l'unité, la suite des modules supérieurs Q_n des itérés $K_n(M, P)$ n'est pas bornée supérieurement.*

REMARQUE. Dans ce cas, on peut tout de même avoir une idée de la rapidité de croissance des Q_n, car on a toujours en effet:

$$Q_n \leqslant \frac{g(\rho)}{\rho^n} \qquad (\rho < \rho_0 < 1).$$

Plus précisément encore, la série $s = \sum Q_n \lambda^n$ a pour rayon de convergence ρ_0 inférieur à l'unité.

REMARQUE. Dans le cas où les K_n sont également bornés, $\rho_0 \geqslant 1$. On a vu que si $\rho_0 > 1$, K_n converge uniformément vers zéro. Le cas douteux est donc celui où $\rho_0 = 1$.

Cas restant à étudier

Les constantes fondamentales de $K(M, P)$ sont toutes de module supérieur ou égal à l'unité, et il y en a au moins une de module égal à l'unité.

C'est dans l'étude de ce cas que nous allons faire intervenir la notion de noyau principal (G., p. 404); mais tout d'abord nous allons rappeler la définition d'un tel noyau.

Soit $K(M, P)$ un noyau dont la résolvante est

$$\mathfrak{K}(M, P, \lambda) = \sum \lambda^{n-1} K_n.$$

On appelle *noyau principal* de $K(M, P)$, relatif à une constante fondamentale λ_j du noyau $K(M, P)$, la quantité

$$N(M, P) = \mathfrak{N}(M, P, 0),$$

$\mathfrak{N}(M, P, \lambda)$ désignant la partie principale relative à λ_j de la résolvante $\mathfrak{K}(M, P, \lambda)$ de $K(M, P)$.

Cette définition étant rappelée, revenons à notre problème.

Nous savons que dans un domaine fini du plan complexe des λ, il n'y a qu'un nombre fini de constantes fondamentales pour K_m (G., p. 426) et par suite aussi pour K; en particulier, il n'y a qu'un nombre fini de constantes fondamentales de module égal à 1.

Soient donc $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$ (avec ici $g \geqslant 1$) les constantes fondamentales de $K(M, P)$ de module égal à l'unité; désignons par $A(M, P)$ la somme des noyaux principaux de $K(M, P)$ relatifs à $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$, et posons

$$\boxed{\epsilon(M, P) = K(M, P) - A(M, P).} \tag{3}$$

Nous décomposons ainsi le noyau K en deux parties, savoir

$$\boxed{K(M, P) = A(M, P) + \epsilon(M, P).} \tag{3'}$$

Les noyaux $A(M, P)$ et $\epsilon(M, P)$ jouissent, nous le savons, des propriétés simples suivantes:

(i) $A(M, P)$ et $\epsilon(M, P)$ sont orthogonaux;

(ii) $A(M, P)$ est un noyau ayant pour seules constantes fondamentales les quantités $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$, et $\epsilon(M, P)$ a pour constantes fondamentales toutes les autres constantes fondamentales de $K(M, P)$ s'il en existe, c'est-à-dire toutes les constantes fondamentales de $K(M, P)$ de module différent de l'unité (G., p. 394).

Or dans le cas actuel les constantes fondamentales de K sont toutes de module supérieur ou égal à l'unité, donc les constantes fonda-

mentales de $\epsilon(M,P)$ sont toutes de module supérieur à l'unité (Exceptionnellement $\epsilon(M,P)$ peut être identiquement nul, ou n'avoir aucune constante fondamentale).

Nous savons aussi (G., p. 417) que chacun des noyaux principaux de $K(M,P)$ est borné ; donc $A(M,P)$ est aussi borné. Et si les noyaux itérés $K_n(M,P)$ sont continus à partir d'un certain rang, on sait aussi (G., p. 417) que les noyaux principaux de $K(M,P)$ et par suite $A(M,P)$ sont aussi continus.

Cela étant, $A(M,P)$ et $\epsilon(M,P)$ étant des noyaux orthogonaux, on a (G., pp. 395, 403)

$$\boxed{K_n(M,P) = A_n(M,P)+\epsilon_n(M,P)} \tag{4}$$

de sorte que K_n et A_n étant bornés pour $n \geqslant m$, on voit que ϵ_n est borné pour $n \geqslant m$. Dès lors, $\epsilon_n(M,P)$ étant soit identiquement nul, soit un noyau sans constantes fondamentales ou dont les constantes fondamentales sont de module supérieur à l'unité, et dont les itérés sont chacun bornés à partir du rang m, alors, d'après un théorème précédent, nous voyons que ϵ_n converge normalement vers zéro.

Par suite, pour étudier le comportement de $K_n(M,P)$, nous sommes ramenés à étudier le comportement de $A_n(M,P)$. Cette fonction est la somme des itérés de rang n du nombre fini de noyaux principaux de $K(M,P)$ relatifs à des constantes fondamentales de module 1; or nous allons voir qu'on peut déterminer l'expression en fonction de n de l'itéré de rang n d'un noyau principal.

Itération des noyaux principaux

Il nous suffira pour la suite d'examiner le cas des noyaux principaux qui sont bornés, et de voir ce qui se passe en particulier pour ceux qui sont continus.

Une fonction $L(M,P)$ bornée sur un domaine V, est considérée comme un *noyau principal*, si sa résolvante (G., p. 343) considérée comme fonction de λ, n'a qu'un seul point singulier c et si elle se réduit à une fraction rationnelle en λ, nulle pour λ infini.

Formons les itérés $L_n(M,P)$; on aura alors

$A_n(M,P) =$ somme des $L_n(M,P)$ relatifs aux constantes fondamentales $\lambda_1 ... \lambda_g$ de K, et il s'agit d'évaluer $L_n(M,P)$ en fonction de n.

On trouvera dans le cours d'analyse de M. Goursat une méthode permettant d'établir l'expression du noyau itéré $L_n(M,P)$ d'un noyau principal, en fonction de n. Cette méthode basée sur la décomposition

d'un noyau principal en une somme des noyaux canoniques, fournit une expression très précise de $L_n(M, P)$. Nous nous proposons ici de montrer que pour obtenir le résultat moins précis qui suffit par la suite, on peut employer une autre méthode qui nous paraît plus rapide.

On sait (G., p. 405) qu'un noyau principal est nécessairement de 'rang fini', c'est-à-dire exprimable sous la forme

$$L(M, P) = \sum_{j=1}^{r} U_j(M) V_j(P),$$

les fonctions U_j étant linéairement indépendantes, ainsi que les fonctions V_j; on sait en outre (G., p. 407) qu'il n'existe aucune combinaison linéaire des U_j qui soit orthogonale à tous les V_j, et inversement. Dans ces conditions, on sait (G., p. 392) qu'on peut déterminer un système de fonctions $X_k(M)$, $Y_k(P)$ biorthogonal et normé, c'est-à-dire tel que

$$\int_V X_k(M) Y_l(M)\, dM = \begin{cases} 0 & (k \neq l), \\ 1 & (k = l), \end{cases} \tag{5}$$

et tel que chaque U_j soit une combinaison linéaire des X_k et chaque V_j une combinaison linéaire des Y_k. En substituant alors dans l'expression de $L(M, P)$, on aura

$$L(M, P) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} a_{kl} X_k(M) Y_l(P), \tag{6}$$

les a_{kl} étant des constantes.

Le noyau itéré $L_n(M, P)$ pourra alors s'écrire sous la forme

$$\boxed{L_n(M, P) = \sum_{k,l} a_{kl}^{(n)} X_k(M) Y_l(P).}$$

Il suffit en effet de prendre $a_{kl}^{(1)} = a_{kl}$ et de déterminer les $a_{kl}^{(n)}$ de sorte que

$$L_{n+n'}(M, P) = \int_V L_n(M, Q)\, L_{n'}(Q, P)\, dQ.$$

C'est-à-dire que

$$\sum_{k,l} a_{kl}^{(n+n')} X_k(M) Y_l(P) = \sum_{k,h,j,l} \left[a_{kh}^{(n)} a_{jl}^{(n')} \int_V Y_h(G) X_j(G)\, dG \right] X_k(M) Y_l(P);$$

ou encore que $$a_{kl}^{(n+n')} = \sum_j a_{kj}^{(n)} a_{jl}^{(n')}$$

en vertu de (5). Les $a_{kl}^{(n)}$ sont donc des fonctions de n vérifiant les équations de récurrence:

$$\boxed{a_{kl}^{(n+1)} = \sum_j a_{kj} a_{jl}^{(n)} = \sum_j a_{kj}^{(n)} a_{jl}.}$$

C'est-à-dire que ce sont les solutions, bien déterminées par les conditions $\kappa_{kl}^{(1)} = a_{kl}$, des équations aux différences finies, du 1er ordre, linéaires à coefficients constants et sans second membre:

$$\kappa_{kl}^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{r} a_{kj}\,\kappa_{jl}^{(n)} \qquad (k = 1, 2,..., r).$$

Nous avons un exemple d'un tel système dans le problème (rappelé au début) des probabilités discontinues en chaîne. Or on connaît* la forme générale des solutions d'un tel système, soit

$$\kappa_k^{(n)} = \sum_g (s_g)^{n-1} Q_{gk}(n)$$

où $Q_{gk}(\kappa)$ est un polynôme en κ, et où s_1, s_2,... sont les racines distinctes de l'équation 'en s' $\Delta(s) = 0$ avec

$$\Delta(s) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{21} & . & . & . & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22}-s & . & . & . & a_{r2} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{1r} & a_{2r} & . & . & . & a_{rr}-s \end{vmatrix}.$$

Nous aurons alors pour la quantité cherchée $a_{kl}^{(n)}$ une expression analogue à $\kappa_k^{(n)}$ mais dans laquelle interviendra l'indice l, soit

$$a_{kl}^{(n)} = \sum_g (s_g)^{n-1} R_{gkl}(n),$$

$R_{gkl}(\kappa)$ étant encore un polynôme en κ. Par conséquent l'expression de l'itéré $L_n(M, P)$ est de la forme

$$L_n(M, P) = \sum_{g,k,l} (s_g)^{n-1} R_{gkl}(n)\, X_k(M)\, Y_l(P).$$

Simplification. Nous allons pouvoir simplifier cette expression de L_n en remarquant qu'il y a un seul s_g; c'est-à-dire que l'équation $\Delta(s) = 0$ a une seule racine.

En effet, dire que s est racine de $\Delta(s) = 0$, c'est dire qu'il y a une même relation linéaire et homogène entre les éléments d'une même ligne du déterminant $\Delta(s)$, c'est-à-dire qu'il existe au moins un système de coefficients u_j non tous nuls, tels que l'on ait

$$\left.\begin{array}{l} u_1 a_{11} + u_2 a_{21} + ... + u_r a_{r1} = s u_1 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ u_1 a_{1k} + u_2 a_{2k} + ... + u_r a_{rk} = s u_k \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ u_1 a_{1r} + u_2 a_{2r} + ... + u_r a_{rr} = s u_r \end{array}\right\}. \tag{7}$$

† Voir par exemple: Lublin, *Revue de Math. Spéciales*, 43 (1933), 393.

Multiplions alors les relations ci-dessus par $Y_1(P),\ldots, Y_k(P),\ldots, Y_r(P)$ et ajoutons, il vient

$$u_1(a_{11}Y_1+a_{12}Y_2+\ldots)+u_2(a_{21}Y_1+a_{22}Y_2+\ldots)+\ldots$$
$$= s(u_1Y_1+u_2Y_2+\ldots+u_rY_r). \qquad (7')$$

Or remarquons que si l'on multiplie $L(M,P)$ par $X_h(P)\,dP$ et qu'on intègre, on a d'après (6)

$$\int\limits_V L(M,P)X_h(P)\,dP = \sum_{k,l} a_{kl}X_k(M)[X_h, Y_l].$$

D'après (5), le crochet est nul, sauf pour $h = l$; on a donc

$$\int\limits_V L(M,P)X_h(P)\,dP = \sum_k a_{kh}X_k(M).$$

De la même façon, on verrait que

$$\int\limits_V L(M,P)Y_i(M)\,dM = \sum_{k,l} a_{kl}Y_l(P)[X_k, Y_i]$$
$$= \sum_l a_{il}Y_l(P).$$

La relation écrite un peu plus haut peut donc s'écrire

$$u_1\int\limits_V L(M,P)Y_1(M)\,dM + u_2\int\limits_V L(M,P)Y_2(P)\,dM + \ldots$$
$$= s(u_1Y_1+\ldots+u_rY_r);$$

ou encore

$$\int\limits_V L(M,P)[u_1Y_1(M)+u_2Y_2(M)+\ldots]\,dM = s[u_1Y_1(P)+\ldots+u_rY_r(P)],$$

ou, en désignant par ϕ la quantité entre crochets

$$\int\limits_V L(M,P)\phi(M)\,dM = s\phi(P),$$

et les u_j étant non tous nuls, la fonction ϕ n'est pas identiquement nulle, sans quoi les Y_i ne seraient pas linéairement indépendantes. Il existe donc une fonction $\phi \not\equiv 0$ et un nombre s, tels que l'on ait la relation ci-dessus, et par conséquent $1/s$ est une constante fondamentale du noyau $L(M,P)$. Or ce noyau étant principal n'a qu'une constante fondamentale soit c. Donc $1/s = c$; $s = 1/c$.

Remarque. D'ailleurs l'équation en s n'a pas de racine nulle.

En effet, en écrivant (6) sous la forme

$$L(M,P) = \sum_{k=1}^{r} X_k(M)\mathfrak{R}_k(P),$$

la relation (7′) deviendrait pour $s = 0$

$$u_1\mathfrak{R}_1(P)+\ldots+u_r\mathfrak{R}_r(P) = 0.$$

Or les u ne sont pas tous nuls. Supposons par exemple $u_r \neq 0$. On aurait, en résolvant en $\mathfrak{R}_r$, une expression de la forme

$$\mathfrak{R}_r(P) = v_1 \mathfrak{R}_1(P) + \ldots + v_{r-1} \mathfrak{R}_{r-1}(P),$$

d'où

$$L(M,P) = \sum_{k=1}^{r-1} [X_k(M) + v_k X_r(M)] \mathfrak{R}_k(M)$$

$$= \sum_{k=1}^{r-1} W_k(M) \mathfrak{R}_k(M),$$

de sorte que $L(M,P)$ serait de rang $\leqslant r-1$ et non de rang r, comme on l'avait supposé.

En résumé, on a $s_1 = s_2 = \ldots = 1/c$ et, par suite, on a pour expression de L_n

$$L_n(M,P) = \frac{1}{c^{n-1}} \sum_{k,l} R_{kl}(n) X_k(M) Y_l(P)$$

où $R_{kl}(n)$ est un polynôme en n. On peut encore écrire

$$L_n(M,P) = \frac{1}{c^{n-1}} l(M,P,n), \tag{8}$$

$l(M,P,n)$ étant un polynôme en n. Il résulte aussi de ce qui précède que $L_n(M,P)$ est comme $L(M,P)$ de rang fini, d'ailleurs au plus égal à celui de L.

Cas particulier. Un cas intéressant est celui où $l(M,P,n)$ est indépendant de n; c'est ce qui a lieu quand c est pôle simple de la résolvante de $L(M,P)$ (G., p. 405), quoique, en général, racine multiple du déterminant de $L(M,P)$.

Réciproquement. Si $l(M,P,n)$ se réduit à une fonction indépendante de n, donc égale à $L(M,P)$, on a pour la résolvante $\mathfrak{L}(M,P,\lambda)$ de $L(M,P)$

$$\mathfrak{L}(M,P,\lambda) = L(M,P) + \ldots + \lambda^{n-1} \frac{1}{c^{n-1}} L(M,P) + \ldots$$

$$= \frac{L(M,P)}{1-(\lambda/c)},$$

et c est pôle simple de cette résolvante.

Reprenons l'expression générale (8)

$$\boxed{L_n(M,P) = \frac{1}{c^{n-1}} l(M,P,n)} \tag{8}$$

du $n^{\text{ième}}$ itéré d'un noyau quelconque. On sait (G., pp. 394 et 404) que $A_n(M,P)$ est la somme des itérés de rang n des noyaux principaux

$L_n^{(j)}(M,P)$ de $K(M,P)$ relatifs aux constantes fondamentales $\lambda_1,\ldots,\lambda_q$ $(q \geqslant 1)$ de $K(M,P)$ de module 1

$$A_n(M,P) = \sum_{j=1}^{q} L_n^{(j)}(M,P) = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{(\lambda_j)^{n-1}} l_j(M,P,n). \tag{9}$$

En posant $\sigma_j = 1/\lambda_j$, on voit que pour M, P fixes, $A_n(M,P)$ est une fonction de n de la forme

$$\boxed{J(n) = \sum_{j=1}^{q} (\sigma_j)^n R_j(n)} \tag{10}$$

où les σ_j sont des nombres distincts, de module 1, et où les $R_j(n)$ sont des polynômes en n dont les coefficients sont des fonctions bornées de M et de P.

L'étude du comportement quand n croît de $A_n(M,P)$ se trouve donc ramenée à celle de l'allure asymptotique des expressions du type de $J(n)$.

Digressions sur l'allure asymptotique des fonctions de n du type

$$J(n) = \sum_{j=1}^{q} (\sigma_j)^n R_j(n).$$

On peut, par un changement de l'ordre des termes, placer au premier rang un terme de rang j de $J(n)$ pour lequel le terme de plus haut degré p de $R_j(n)$ est le plus élevé, ou du moins n'est dépassé par aucun autre (ce plus haut degré p pouvant d'ailleurs être nul). On pourra donc écrire $J(n)$ sous la forme

$$\begin{aligned} J(n) &= n^p[a_1(\sigma_1)^n + \ldots + a_q(\sigma_q)^n] + n^{p-1}[b_1(\sigma_1)^n + \ldots + b_q(\sigma_q)^n] + \ldots \\ &= n^p[U(n) + \eta(n)] \end{aligned}$$

avec
$$\left.\begin{aligned} U(n) &= a_1(\sigma_1)^n + \ldots + a_q(\sigma_q)^n \quad \text{et} \quad a_1 \not\equiv 0 \\ \eta(n) &= \frac{1}{n}[b_1(\sigma_1)^n + \ldots + b_q(\sigma_q)^n] + \frac{1}{n^2}[\ \ ] + \ldots \end{aligned}\right\}.$$

Il est clair que $\eta(n) \to 0$ avec $1/n$; il reste à savoir ce que devient $U(n)$ quand n croît. Si $U(n)$ tendait vers zéro, il en serait de même de

$$\frac{U(n+1)}{(\sigma_q)^{n+1}} - \frac{U(n)}{(\sigma_q)^n} = U^{(2)}(n),$$

c'est-à-dire de $\quad U^{(2)}(n) = a_1^{(2)}[\sigma_1^{(2)}]^n + \ldots + a_{q-1}^{(2)}[\sigma_{q-1}^{(2)}]^n$

avec $$a_j^{(2)} = a_j\left(\frac{\sigma_j}{\sigma_q} - 1\right) \quad \text{et} \quad \sigma_j^{(2)} = \frac{\sigma_j}{\sigma_q};$$

les $\sigma_j^{(2)}$ sont distincts comme les σ_j; $U^{(2)}(n)$ est donc de la même forme que $U(n)$. On a
$$|\sigma_j^{(2)}| = 1 \quad \text{et} \quad a_1^{(2)} \not\equiv 0.$$
Mais $U^{(2)}(n)$ a un terme de moins que $U(n)$. En opérant sur $U^{(2)}(n)$ comme sur $U(n)$, et ainsi de suite, on arriverait à une expression qui tendrait vers zéro et serait de la forme
$$U^{(q)}(n) = a_1^{(q)}[\sigma_1^{(q)}]^n$$
avec
$$a_1^{(q)} \not\equiv 0 \quad \text{et} \quad |\sigma_1^{(q)}| = 1.$$
Ainsi $U(n)$ ne peut tendre vers zéro. Dès lors, il existe au moins une suite $\mathfrak{N}'$ d'entiers croissants $n_1 > n_2 > \dots$ tels que $|U(n)|$ ait une borne inférieure positive quand n parcourt $\mathfrak{N}'$. Or $|U(n)|$ reste borné supérieurement; on a, en effet
$$|U(n)| \leqslant |a_1|+\dots+|a_q|.$$
Par suite, il y a une suite Z, au moins extraite de $\mathfrak{N}'$, d'entiers croissants $n_1 < n_2 < \dots$ telle que $U(n)$ converge vers un nombre W fixe et $\neq 0$, quand n parcourt la suite Z.

Alors si $p \geqslant 1$, $J(n)$ croît indéfiniment en module quand n parcourt la suite Z.

Au contraire, si $p = 0$, on a $J(n) = U(n)+\eta(n)$ où $U(n)$ est borné et $\eta(n) \to 0$; donc $J(n)$ est borné.

En résumé. *Pour que $J(n)$ reste borné quand n croît, il faut et il suffit que les polynômes $R_j(n)$ se réduisent à des constantes par rapport à n.*

Remarque. Nous venons de raisonner comme si les coefficients $a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots,$ étaient fixes; en réalité, s'ils ne dépendent pas de n, ils dépendent en général de M et P qui sont variables sur V; mais on a vu que si les $K_n(M, P)$ sont chacun bornés à partir d'un certain rang, les coefficients $a_1, \dots, b_1, \dots$ seront aussi bornés, de sorte que la conclusion précédente subsiste encore.

On vient de voir que si l'une au moins des expressions $R_j(n)$, $l_j(M; P, n)$ n'est pas indépendante de n, il y a un couple M, P au moins, tel que $A_n(M, P)$ croisse indéfiniment, tel par suite que la borne supérieure Q_n de $|K_n(M, P)|$ croisse aussi indéfiniment, au moins quand n parcourt une certaine suite croissante de valeurs entières.

D'ailleurs $R_j(n) = l_j(M, P, n)/\sigma_j$ ne peut dépendre de n que si la constante fondamentale λ_j est pôle multiple de la résolvante $\mathfrak{K}(M, P, \lambda)$ de $K(M, P)$, et réciproquement.

En résumé:

(i) si l'une au moins des constantes fondamentales de module 1 de $K(M, P)$ est pôle multiple de la résolvante de K, Q_n croît indéfiniment quand n croît par valeurs convenables;

(ii) si, au contraire, toutes les constantes fondamentales de module 1 de $K(M, P)$ sont pôles simples de la résolvante, et s'il n'y a pas de constantes fondamentales de module inférieur à 1, alors $U(n)$ reste borné quels que soient n, M et P, et $\eta(n)$ tend vers zéro uniformément quand M et P varient sur V.

S'il y a effectivement au moins une constante fondamentale de module 1, alors $U(n)$ ne tend pas vers zéro, $J(n) = U(n)+\eta(n)$ reste borné en module quand n, M et P varient, sans tendre vers zéro, et alors il en est de même de $K_n(M, P)$ pour n assez grand.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Pour que la suite Q_m, Q_{m+1}, Q_{m+2},..., Q_n,... des bornes supérieures, en valeur absolue, des noyaux K_m, K_{m+1}, K_{m+2},..., K_n,... soit bornée, c'est-à-dire, pour qu'on se trouve dans ce que nous appellerons le 'cas borné', il faut et il suffit*

(i) *que toutes les constantes fondamentales de $K(M, P)$ soient en modules, supérieures ou égales à* 1.

(ii) *qu'en outre, s'il y en a qui sont de module* 1, *celles-ci soient pôles simples de la résolvante de $K(M, P)$.*

Il reste donc à examiner en détail ce qui se passe dans le *cas borné.*

Remarque. Nous savons déjà que s'il n'y a pas de constantes fondamentales pour K, ou si toutes les constantes fondamentales sont de module supérieur à 1, Q_n tend vers zéro. Nous savons aussi que la réciproque est vraie.

Existence d'une limite généralisée dans le cas borné

On aperçoit facilement *des exemples de cas bornés où K_n n'a pas de limite*; prenons, par exemple, le cas où K se réduirait à un noyau principal relatif au pôle simple c; on a alors

$$K_n(M, P) = K(M, P)\frac{1}{c^{n-1}}.$$

Si, alors, nous supposons $c = -1$, on voit que $K_n(M, P)$ est égal alternativement à K et à $-K$, et par suite n'a pas de limite.

Le fait qu'il n'y a pas nécessairement une limite de lasui te des K_n quand cette suite est bornée en valeur absolue va rendre im-

portant le résultat que nous allons établir, à savoir: il y a toujours, dans le cas borné, une limite généralisée, en un sens que nous allons préciser.

On a en effet

$$K_n(M,P) = \sum_{j=1}^{q} \frac{l_j(M,P)}{(\lambda_j)^{n-1}} + \epsilon_n(M,P) = A_n(M,P) + \epsilon_n(M,P)$$

où $\epsilon_n(M,P)$ converge uniformément vers zéro, et où $|\lambda_j| = 1$.

Prenons la moyenne arithmétique des n premiers K_n; mais comme $K_1,\dots,K_{m-1}$ peuvent être non bornés, prenons-la à partir de K_ν avec $\nu \geqslant m$. On a alors

$$\mathfrak{M}_\nu(M,P,n) = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{n} K_{\nu+t}(M,P) = \alpha_n + \beta_n$$

avec

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n &= \sum_{j=1}^{q} l_j(M,P)\left[\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda_j}\right)^{\nu+t-1}\right] \\ \beta_n &= \frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1} \epsilon_{\nu+t}(M,P) \end{aligned}\right\}.$$

Puisque $\epsilon_n(M,P)$ converge uniformément vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, et que M et P varient sur V, il en est évidemment de même de $\beta_n(M,P)$ (nous retrouverons et préciserons plus loin ce résultat).

Considérons l'expression de $\alpha_n(M,P)$; le crochet est égal à 1 si $\lambda_j = 1$, et si $\lambda_j \neq 1$ ce crochet peut s'écrire

$$\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{\lambda_j}\right)^{\nu-1} + \left(\frac{1}{\lambda_j}\right)^{\nu} + \dots + \left(\frac{1}{\lambda_j}\right)^{\nu+n-2}\right] = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\lambda_j}\right)^{\nu-1}\left\{\frac{1-\left(\frac{1}{\lambda_j}\right)^n}{1-\frac{1}{\lambda_j}}\right\}.$$

Si $\lambda_j \neq 1$, on a

$$\left|\frac{1-\left(\frac{1}{\lambda_j}\right)^n}{1-\frac{1}{\lambda_j}}\right| \leqslant \frac{2}{\left|1-\frac{1}{\lambda_j}\right|}.$$

Par suite, puisque les $l_j(M,P)$ sont bornés quand M et P varient sur V, on voit que $\alpha_n(M,P)$ converge uniformément vers une limite $\Pi(M,P)$ quand n croît indéfiniment; cette limite est nulle si tous les $\lambda_j \neq 1$, et égale à $l_1(M,P)$ si par exemple $\lambda_1 = 1$. C'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n(M,P) = \Pi(M,P) = \begin{cases} 0 \text{ si tous les } \lambda_j \neq 1, \\ l_1(M,P), \text{ si, par exemple, } \lambda_1 = 1. \end{cases}$$

Dans tous les cas, cette limite $\Pi(M, P)$ est indépendante du rang ν ($\geqslant m$) à partir duquel on a compté la moyenne.

Nous avons donc

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_\nu(M, P, n) = \Pi(M, P),}$$

et $\Pi(M, P)$ est égal au noyau principal de $K(M, P)$ relatif à l'unité, si l'unité est constante fondamentale de K.

$\Pi(M, P) = 0$ si l'unité n'est pas constante fondamentale de K.

Nous allons maintenant donner une définition.

Définition. On dit qu'une suite de nombres v_n *converge en moyenne, ou au sens de Cesàro,* quand l'expression

$$\frac{1}{n}(v_\nu + v_{\nu+1} + \ldots + v_{\nu+n-1})$$

a une limite quand n augmente indéfiniment. Quand elle existe, cette limite est nécessairement indépendante de ν.

Nous pouvons alors énoncer le résultat précédent de la façon suivante:

Théorème. *Toutes les fois que la suite des noyaux itérés $K_n(M, P)$ (chacun borné, à partir d'un certain rang) est bornée dans son ensemble à partir de ce rang cette suite converge uniformément (et même normalement) au sens de Cesàro, vers une limite $\Pi(M, P)$. Et cette limite est égale au noyau principal $l_1(M, P)$ de $K(M, P)$ relatif à la constante fondamentale $\lambda_1 = 1$, ou à zéro si l'unité n'est pas constante fondamentale de $K(M, P)$.*

Remarque. Nous venons de voir que l'expression

$$\mathfrak{M}_\nu(M, P, n) - \Pi(M, P)$$

est un infiniment petit avec $1/n$; en vue des applications, il est bon d'en pouvoir préciser l'ordre. On a

$$\mathfrak{M}_\nu(M, P, n) - \Pi(M, P) = \gamma_n(M, P) + \beta_n(M, P)$$

en désignant par $\gamma_n(M, P)$ ce qui reste de $\alpha_n(M, P)$ quand on en a retiré éventuellement le terme correspondant à l'unité si celle-ci est constante fondamentale. Or on voit que

$$|\gamma_n(M, P)| \leqslant \frac{1}{n} \sum{}' W_j \frac{2}{\left|1 - \frac{1}{\lambda_j}\right|} = \frac{T_1}{n},$$

en désignant par W_j une borne supérieure de $|l_j(M, P)|$ et par $\sum'$ la

somme prise en excluant, s'il y a lieu, le terme correspondant à la constante fondamentale égale à l'unité; de sorte que T_1 est un nombre fini indépendant de ν, n, M et P.

D'autre part, on a vu* que

$$|\epsilon_n(M,P)| \leqslant \frac{g(\rho)}{\rho^n} \quad \text{avec ici} \quad \rho > 1.$$

Donc

$$|\beta_n(M,P)| \leqslant \frac{g(\rho)}{n}\left[\frac{1}{\rho^m}+\ldots+\frac{1}{\rho^{m+n-1}}\right] \leqslant \frac{1}{n}\frac{g(\rho)}{\rho^m}\frac{1}{1-1/\rho}$$

d'où

$$|\beta_n(M,P)| \leqslant \frac{1}{n}\frac{g(\rho)}{\rho^m}\frac{1}{1-1/\rho} = \frac{T_2}{n}$$

où T_2 est aussi indépendant de ν, n, M et P.

Finalement, nous avons

$$|\mathfrak{M}_\nu(M,P,n)-\Pi(M,P)| \leqslant \frac{T}{n}$$

où T est un nombre indépendant de ν ($\geqslant m$), n, M et P. Ainsi, *l'erreur commise en prenant $\mathfrak{M}_\nu(M,P,n)$ pour la limite généralisée $\Pi(M,P)$ est un infiniment petit qui est au moins du premier ordre.*

On peut exprimer ce résultat d'une autre façon. En effet, on a

$$n[\mathfrak{M}_\nu(M,P,n)-\Pi(M,P)] = \sum_{t=\nu}^{\nu+n-1}[K_t(M,P)-\Pi(M,P)].$$

Nous pouvons donc dire que les valeurs des sommes partielles des termes de la série

$$\sum_{t=\nu}^{\infty}[K_t(M,P)-\Pi(M,P)]$$

sont bornées dans leur ensemble.

Calcul de la limite généralisée $\Pi(M,P)$

La limite, au sens de Cesàro, des noyaux itérés $K_n(M,P)$ est bien déterminée par ce qui précède. Elle est nulle si l'unité n'est pas constante fondamentale de K; et dans le cas contraire c'est le noyau principal de K relatif à $\lambda_1 = 1$. D'ailleurs, on peut préciser la nature de cette limite $\Pi(M,P)$ dans le second cas. Comme nous l'avons vu, les λ_j — et, en particulier, λ_1 — sont ici pôles simples de la résolvante. Dans ce cas, nous savons (G., p. 405) que le noyau principal $\Pi(M,P)$ est de la forme

$$\boxed{\Pi(M,P) = \Phi_1(M)\Psi_1(P)+\ldots+\Phi_r(M)\Psi_r(P).} \tag{11}$$

C'est-à-dire qu'il est de 'rang fini'; nous savons de plus (G., p. 405)

* p. 112.

que dans cette formule les Φ et Ψ sont des fonctions fondamentales, correspondant à $\lambda_1 = 1$, respectivement pour les noyaux associés $K(M,P)$ et $K(P,M)$; et enfin que les Φ et les Ψ forment un système biorthogonal et normé:

$$\int_V \Phi_j(M)\Psi_k(M)\,dM = \begin{cases} 1 & (j=k), \\ 0 & (j \neq k). \end{cases} \tag{12}$$

Autre méthode.

On pourrait aussi obtenir ces différents résultats *sans supposer connue la notion de noyau principal*, en se plaçant simplement dans l'hypothèse où les $K_n(M,P)$ ont une limite uniforme au sens de Cesàro.

Partons en effet de la formule

$$K_{t+\nu}(M,P) = \int_V K_t(M,Q)K_\nu(Q,P)\,dQ = \int_V K_\nu(M,Q)K_t(Q,P)\,dQ;$$

ajoutons ces formules pour $t = 1, 2,\ldots, n$; en supposant $\nu \geqslant m$, on aura

$$\begin{aligned} K_{\nu+1}(M,P)+\ldots+K_{\nu+n}(M,P) &= K_{\nu+1}(M,P)+\ldots+K_{2\nu}(M,P)+ \\ &\quad + \int_V [K_{\nu+1}(M,Q)+\ldots+K_n(M,Q)]K_\nu(Q,P)\,dQ \\ &= K_{\nu+1}(M,P)+\ldots+K_{2\nu}(M,P)+\int_V K_\nu(M,Q)[K_{\nu+1}(Q,P)+\ldots+K_n(Q,P)]\,dQ. \end{aligned}$$

En divisant les deux membres par n et faisant croître n indéfiniment, on aura (puisque $K_n(M,P)$ est borné pour $n \geqslant m$)

$$\Pi(M,P) = \int_V \Pi(M,Q)K_\nu(Q,P)\,dQ = \int_V K_\nu(M,Q)\Pi(Q,P)\,dQ. \tag{13}$$

Mais si, au lieu de K_ν, on était parti de $K_{\nu+1}$, on aurait trouvé

$$\Pi(M,P) = \int_V K_{\nu+1}(M,Q)\Pi(Q,P)\,dQ.$$

$\Pi(M,P)$ serait donc solution simultanée, pour P fixe, des deux équations

$$\left.\begin{aligned} X(M) &= \int_V K_\nu(M,Q)X(Q)\,dQ \\ X(M) &= \int_V K_{\nu+1}(M,Q)X(Q)\,dQ \end{aligned}\right\}.$$

La deuxième de ces équations s'écrit

$$X(M) = \int_V K(M,R)\left[\int_V K_\nu(R,Q)X(Q)\,dQ\right]dR$$

et, en tenant compte de la première,

$$X(M) = \int_V K(M,R)X(R)\,dR. \tag{14}$$

On verrait de même que $\Pi(M,P)$ est solution, quand M est fixe, de l'équation

$$Y(P) = \int_V K(R,P)Y(R)\,dR. \tag{15}$$

Ainsi considérée comme fonction de M, la fonction $\Pi(M,P)$ est solution de l'équation homogène de Fredholm (14), et considérée comme fonction de P, c'est une solution de l'équation associée (15).

La question du calcul de $\Pi(M, P)$ ne se pose pas si l'unité n'est pas constante fondamentale de $K(M, P)$, car alors $\Pi(M, P) = 0$.

Si, au contraire, l'unité est constante fondamentale de $K(M, P)$, $\Pi(M, P)$ étant solution de (14), doit être une combinaison linéaire des r fonctions fondamentales linéairement indépendantes de $K(M, R)$ relatives à $\lambda_1 = 1$, soient $\Phi_1(M),..., \Phi_r(M)$. On doit donc avoir

$$\boxed{\Pi(M, P) = \sum_{j=1}^{r} \Phi_j(M)\Theta_j(P)} \tag{16}$$

et puisque $\Pi(M, P)$ est solution de (15), on a

$$\sum_{j=1}^{r} \Phi_j(M)\Theta_j(P) = \sum_{j=1}^{r} \Phi_j(M) \int_V K(R, P)\Theta_j(R)\, dR$$

d'où
$$\Theta_j(P) = \int_V K(R, P)\Theta_j(R)\, dR.$$

Donc les $\Theta_j(P)$ seront certaines fonctions fondamentales relatives à $\lambda_1 = 1$ du noyau $K(R, P)$ associé à $K(P, R)$.

Ces fonctions $\Theta_j(P)$ sont linéairement indépendantes. En effet, soit $\Psi(M)$ une fonction fondamentale de $K(P, M)$ relative à la constante fondamentale $\lambda_1 = 1$. On a
$$\Psi(M) = \int_V K_n(R, M)\Psi(R)\, dR,$$

d'où
$$\Psi(M) = \int_V [K_\nu(R, M) + ... + K_{\nu+n-1}(R, M)] \frac{1}{n} \Psi(R)\, dR,$$

et, comme $\Psi(R)$ est borné, on a en passant à la limite

$$\Psi(M) = \int_V \Pi(R, M)\Psi(R)\, dR, \tag{17}$$

d'où
$$\Psi(M) = \sum_{j=1}^{r} [\Phi_j, \Psi]\, \Theta_j(M).$$

Si donc les $\Theta_j(P)$ n'étaient pas linéairement indépendantes, les solutions Ψ fondamentales du noyau associé $K(P, M)$ correspondant à $\lambda_1 = 1$, seraient toutes des combinaisons linéaires d'un nombre de fonctions linéairement distinctes inférieur à r, ce qui n'est pas possible.

Or $\Pi(M, P)$ vérifie une équation fonctionnelle simple; on a, en effet, en ajoutant des équations analogues à (13),

$$\Pi(M, P) = \int_V \Pi(M, Q)[K_\nu(Q, P) + ... + K_{\nu+n-1}(Q, P)] \frac{1}{n}\, dQ,$$

d'où, en passant à la limite

$$\boxed{\Pi(M, P) = \int_V \Pi(M, Q)\, \Pi(Q, P)\, dQ.}$$

Dès lors
$$\sum_j \Phi_j(M)\Theta_j(P) = \sum_{j,k} \Phi_j(M)\Theta_k(P)[\Phi_k, \Theta_j].$$

Les Θ_j étant indépendants, on a

$$\Theta_j(P) = \sum_k \Theta_k(P)[\Phi_k, \Theta_j],$$

et les Θ_k étant aussi indépendants, on a

$$[\Phi_k, \Theta_j] = \begin{cases} 0 & (j \neq k), \\ 1 & (j = k). \end{cases}$$

Quand on se donne les Φ_k, il n'y a qu'un système de solutions fondamentales $\Theta_j(P)$ de $K(M,P)$ qui satisfasse à ces conditions car tout autre système $\Psi_1(P),\ldots,\Psi_r(P)$ serait de la forme

$$\Psi_j(P) = \sum_{h=1}^{r} u_{jh}\Theta_h(P),$$

et l'on aurait

$$(0 \text{ ou } 1) = [\Phi_k, \Psi_j] = \sum_{h=1}^{r} u_{jh}[\Phi_k, \Theta_h] = u_{jk},$$

d'où

$$\Psi_j(P) = \Theta_j(P).$$

EN RÉSUMÉ: *Dans le cas où $K_n(M,P)$ converge uniformément au sens de Cesàro vers une limite $\Pi(M,P) \not\equiv 0$,*

(i) *l'unité est constante fondamentale de $K(M,P)$;*

(ii) *à cette constante $\lambda_1 = 1$ correspond au moins un système biorthogonal et normé de solutions fondamentales Φ_j de $K(M,P)$, Θ_j du noyau associé $K(P,M)$;*

(iii) *quel que soit le système biorthogonal et normé de solutions fondamentales Φ_j de $K(M,P)$, Θ_j du noyau associé (solutions correspondant à $\lambda_1 = 1$), on peut écrire,*

$$\Pi(M,P) = \sum \Phi_j(M)\Theta_j(P);$$

(iv) *quand on choisit les Φ_j, les Θ sont déterminés.*

ÉTUDE DE QUELQUES CAS PARTICULIERS

Nous allons maintenant étudier quelques cas particuliers dont la considération s'impose dans l'application aux probabilités continues en chaînes; et qui s'étendent assez aisément à l'itération d'un noyau quelconque.

Ces cas particuliers ne se présentent naturellement que dans le cas borné auquel nous continuerons à nous limiter dans ce qui suit.

I. Cas où la limite généralisée $\Pi(M,P)$ est indépendante de M

Dans l'application aux évènements en chaînes, il est important de distinguer le cas où $\Pi(E,F)$ est indépendant de l'état initial E. Nous allons traiter la question dans le cas plus général actuel.

Il y a d'abord le cas où l'unité n'est pas constante fondamentale de $K(M,P)$ puisqu' alors $\Pi(M,P) \equiv 0$.

Si, au contraire, l'unité est constante fondamentale de K, on a obtenu* l'équation (15), et on verrait, de même, que pour une fonction fondamentale $\phi(M)$ relative à $\lambda_1 = 1$ et à $K(M,P)$, on a

$$\phi(M) = \int_V \Pi(M,P)\phi(P)\,dP. \tag{17'}$$

Lorsque $\Pi(M,P)$ est indépendant de M, le second membre de (17′) est une constante. Il faut donc qu'il corresponde à $\lambda_1 = 1$ une seule fonction fondamentale de $K(M,P)$ à un facteur constant près,

* p. 130.

et que cette fonction soit une constante non nulle. Comme on a par définition de ϕ

$$\phi(M) = \int_V K(M, P)\phi(P)\, dP,$$

on voit qu'en divisant par la constante non nulle $\phi(M) \equiv \phi(P)$, on aura la condition nécessaire

$$(\mathrm{T}_1) \qquad \int_V K(M, P)\, dP = 1.$$

(C'est là une condition qui se trouve vérifiée d'elle-même dans l'application aux probabilités en chaînes.)

D'ailleurs, en divisant (17′) par la constante non nulle $\phi(M) \equiv \phi(P)$ et remplaçant $\Pi(M, P)$ par $\Pi(P)$ on a

$$\int_V \Pi(P)\, dP = 1.$$

Ainsi il existe une solution commune $\Pi(P)$ au système (E) d'équations:

$$(\mathrm{E}) \qquad \left.\begin{aligned} Y(P) &= \int_V K(Q, P) Y(Q)\, dQ \\ 1 &= \int_V Y(P)\, dP \end{aligned}\right\}. \qquad (18)$$

Cette solution commune est unique. Soit, en effet, $Y_0(P)$ une solution commune quelconque, on aura par itération de (18)

$$(a) \quad Y_0(P) = \int_V K_n(Q, P) Y_0(Q)\, dQ.$$

Or K_n étant borné pour n assez grand, Y_0 supposé intégrable sera nécéssairement borné en vertu de (a). En prenant la moyenne, on aura aussi

$$(b) \quad Y_0(P) = \int_V \mathfrak{M}_\nu(Q, P, n) Y_0(Q)\, dQ;$$

en passant à la limite dans (b), on aura donc

$$(c) \quad Y_0(P) = \int_V \Pi(P) Y_0(Q)\, dQ = \Pi(P) \int_V Y_0(Q)\, dQ.$$

Comme $Y_0(P) \not\equiv 0$, on voit d'abord qu'on aura d'après (c)

$$\int Y_0(Q)\, dQ \neq 0,$$

et alors $Y_0(P)$ sera de la forme

$$Y_0(P) = \alpha\Pi(P).$$

La constante α sera déterminée par la condition

$$1 = \int_V Y_0(P)\,dP = \alpha \int_V \Pi(P)\,dP = \alpha.$$

On a donc bien une seule solution pour le système (E), à savoir

$$Y_0(P) = \Pi(P).$$

Réciproquement. Supposons la condition (T_1) vérifiée par $K(M,P)$; alors en posant

$$U_n(M) = \int_V K_n(M,P)\,dP$$

on a

$$\begin{aligned} U_{n+1}(M) &= \int_V \Big[\int_V K_n(M,Q)K(Q,P)\,dQ\Big]\,dP \\ &= \int_V K_n(M,Q)\Big[\int_V K(Q,P)\,dP\Big]\,dQ \\ &= \int_V K_n(M,Q)\,dQ = U_n(M). \end{aligned}$$

Donc

$$U_n(M) = U_1(M) = 1.$$

Ainsi on aura également

$$(\mathrm{T}) \qquad \int_V K_n(M,P)\,dP = 1,$$

pour n entier quelconque. D'où, en prenant une moyenne arithmétique

$$\int_V \mathfrak{M}_\nu(M,P,n)\,dP = 1$$

et à la limite

$$\int_V \Pi(M,P)\,dP = 1.$$

Le système (E) sera donc vérifié par la limite généralisée $\Pi(M,P)$ quel que soit M sur V. Si, maintenant, nous supposons de plus que le système (E) n'a qu'une seule solution $Y_0(P)$, alors $\Pi(M,P) \equiv Y_0(P)$ quel que soit M, donc $\Pi(M,P)$ est indépendant de M.

En résumé, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Dans le cas borné, pour que la limite généralisée* $\Pi(M,P)$ *de* $K_n(M,P)$ *soit indépendante de* M, *et non identiquement nulle, il faut et il suffit:*

(i) *que l'on ait la condition* (T_1)

$$\boxed{(\mathrm{T}_1) \quad \int_V K(M,P)\,dP = 1;}$$

(ii) *qu'il existe une solution et une seule du système* (E)

$$\boxed{(\mathrm{E}) \qquad \left.\begin{aligned} Y(P) &= \int_V K(Q,P)Y(Q)\,dQ \\ 1 &= \int_V Y(P)\,dP \end{aligned}\right\}.}$$

Et alors cette solution sera précisément l'expression $\Pi(P)$ *indépendante de* M *à laquelle se réduit* $\Pi(M,P)$.

Autre forme des conditions. La condition (ii) précédente peut être remplacée par une condition à peu près évidente mais qui peut parfois être utile. Pour pouvoir l'énoncer, rappelons qu'on appelle *rang d'une constante fondamentale* c d'un noyau, le nombre de solutions fondamentales linéairement distinctes correspondantes à c.

On a vu* que toute solution fondamentale $\phi(M)$ correspondant à $\lambda_1 = 1$ et au noyau $K(M,P)$, l'est aussi pour $\lambda_1 = 1$ et le noyau $\Pi(M,P)$. On a donc

$$\phi(M) = \int_V \Pi(M,P)\phi(P)\,dP.$$

Quand $\Pi(M,P)$ ne dépend que de P, $\phi(M)$ est une constante; donc $\lambda_1 = 1$ est de rang 1.

Réciproquement, si $\lambda_1 = 1$ est de rang 1, la formule

$$\Pi(M,P) = \sum_{j=1}^{r} \Phi_j(M)\Theta_j(P)$$

se réduit à

$$\Pi(M,P) = \Phi(M)\Theta(P).$$

Si, en outre, on a la condition (T_1), alors

$$1 = \int_V \Pi(M,P)\,dP = \Phi(M)\int_V \Theta(P)\,dP;$$

donc $\phi(M)$ est une constante, et $\Pi(M,P)$ est indépendant de M. Notre théorème précédent peut donc s'énoncer aussi:

THÉORÈME. *Dans le cas borné, pour que la limite généralisée* $\Pi(M,P)$ *soit indépendante de* M *et non identiquement nulle, il faut et il suffit:*

(i) *que l'on ait la condition* (T_1)

$$(\mathrm{T}_1) \qquad \int_V K(M,P)\,dP = 1;$$

(ii) *que l'unité soit constante fondamentale du noyau* $K(M,P)$ *et de rang* 1.

* p. 132.

II. Cas où la limite généralisée $\Pi(M, P)$ est indépendante de P

De la même manière que pour le cas précédent, on établirait la proposition suivante.

THÉORÈME. *Dans le cas borné, pour que la limite généralisée* $\Pi(M, P)$ *soit indépendante de* P *et non identiquement nulle, il faut et il suffit:*

(i) *que l'on ait la condition* (T_1')

$$(T_1') \qquad \int_V K(M,P)\,dM = 1;$$

(ii) *que l'unité soit constante fondamentale du noyau* $K(M, P)$ *et de rang* 1.

III. Cas où la limite généralisée $\Pi(M,P)$ est indépendante de M et de P

En réunissant les deux cas précédents, on obtient l'énoncé suivant.

THÉORÈME. *Dans le cas borné, pour que la limite généralisée* $\Pi(M, P)$ *soit une constante, il faut et il suffit:*

(i) *ou bien que l'unité ne soit pas constante fondamentale de* $K(M, P)$, *et alors* $\Pi(M, P) \equiv 0$;

(ii) *ou bien que l'on ait les trois conditions suivantes*

$$(a) \qquad (T_1) \qquad \int_V K(M,P)\,dP = 1,$$

$$(b) \qquad (T_1') \qquad \int_V K(M,P)\,dM = 1,$$

(*c*) *l'unité est constante fondamentale de rang* 1 *de* $K(M, P)$.

REMARQUE. D'ailleurs si $\Pi(M, P)$ se réduit à une constante A, on a $A = 1/V$; en effet la relation*

$$\int_V \Pi(M,P)\,dP = 1$$

donne alors $\displaystyle\int_V A\,dP = 1$ d'où $A = \dfrac{1}{V}$.

Autre forme de condition. Lorsque $K(M, P)$ est borné sur le domaine V, le déterminant de Fredholm $D(\lambda)$ a une signification déterminée et peut être utilisé pour transformer la condition que $\lambda_1 = 1$ soit de rang 1.

Nous sommes en effet ici dans le cas où les constantes fonda-

* Établie, p. 134.

mentales de module 1 de $K(M, P)$ sont supposées pôles simples de la résolvante (puisque nous sommes dans le cas borné). Or dans ce cas, on sait (G., p. 413) que pour un pôle simple λ_g de la résolvante, le rang de λ_g est égal à l'ordre de multiplicité de λ_g considéré comme racine de $D(\lambda)$.

La condition que $\lambda_1 = 1$ soit de rang 1, peut donc encore, dans le cas actuel, s'exprimer ainsi: *que* $\lambda_1 = 1$ *soit racine simple de* $D(\lambda) = 0$.

Quand $K(M, P)$ est borné, nous savons que $D(\lambda)$ est le produit du déterminant $d(\lambda)$ du noyau principal $L(M, P)$ de $K(M, P)$, relatif à c, et du déterminant $\delta(\lambda)$ relatif au noyau $K(M, P)-L(M, P)$ lequel n'a pas c pour constante fondamentale. Le déterminant $d(\lambda)$ est de la forme $(1-\lambda/c)^m$ et le déterminant $\delta(\lambda)$ est tel que $\delta(c) \neq 0$. De sorte que la racine c de $D(\lambda)$ est racine de $d(\lambda)$ avec le même ordre de multiplicité.

Quand le noyau $K(M, P)$ *n'est pas borné*, les termes de $D(\lambda)$ peuvent devenir infinis, de sorte que $D(\lambda)$ n'a pas une signification déterminée. Mais *nous pourrons encore donner une signification* à l'ordre de la constante fondamentale *c considérée comme racine de* $D(\lambda)$, en appelant ainsi *l'ordre de c considéré comme racine du déterminant* $d(\lambda)$, *relatif au noyau principal de* $K(M, P)$ *relatif à c*. Ce déterminant $d(\lambda)$ garde des coefficients finis, quand les K_n sont, à partir d'un certain rang, bornés, puisque alors $L(M, P)$ est borné.

Mais l'ordre de c comme racine de $d(\lambda)$ est égal au rang de c comme constante fondamentale de $L(M, P)$ lequel est égal au rang de c comme constante fondamentale de $K(M, P)$.

Nous pourrons donc, dans tous les cas, énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Que le noyau* $K(M, P)$ *soit borné, ou seulement, que les itérés* $K_n(M, P)$ *soient bornés à partir d'un certain rang, pour que la limite généralisée* $\Pi(M, P)$ *soit indépendante de* M *et non identiquement nulle, il faut et il suffit:*

(i) *que la condition* (T_1) *soit vérifiée*

$$(T_1) \qquad \int_V K(M, P)\, dP = 1;$$

(ii) *que l'unité soit racine simple (au sens qui vient d'être précisé) du déterminant* $D(\lambda)$ *de* $K(M, P)$.

Grâce à l'extension ci-dessus de la signification de l'ordre de multiplicité, nous avons donc pu énoncer le théorème qui correspond complètement à la proposition de même nature dans la théorie des probabilités

discontinues en chaîne ou plus généralement celle des équations aux différences finies.*

IV. Cas où les $K_n(M, P)$ sont asymptotiquement périodiques

Nous avons vu† que, dans le cas borné, les noyaux itérés de $K(M, P)$ sont de la forme

$$K_n(M, P) = A_n(M, P) + \epsilon_n(M, P)$$

où $\epsilon_n(M, P)$ converge uniformément vers zéro et $A_n(M, P)$ est de la forme

$$A_n(M, P) = \sum_{j=1}^{q} l_j(M, P) \frac{1}{(\lambda_j)^{n-1}} \quad \text{avec} \quad |\lambda_j| = 1\,;$$

ou encore, en posant $\lambda_j = e^{-i\phi_j}$,

$$A_n(M, P) = \sum_{j=1}^{q} U_j(M, P) e^{in\phi_j}$$

où les ϕ_j sont réels.

On voit donc que pour M, P fixes, la fonction $A_n(M, P)$ est une fonction *presque périodique* au sens de M. Harald Bohr. Un cas particulièrement intéressant, est celui où les quantités $\lambda_j = e^{i\phi_j}$ qui sont de module 1 sont telles que les rapports $\phi_j/2\pi$ soient rationnels; soit par exemple

$$\frac{\phi_j}{2\pi} = \frac{\alpha_j}{\beta_j}, \quad \text{les } \alpha_j \text{ et } \beta_j \text{ étant entiers, } \beta_j \geqslant 1.$$

Soit alors N un multiple commun des dénominateurs β_j; on aura:

$$\frac{\phi_j}{2\pi} = \frac{\gamma_j}{N}, \quad \gamma_j \text{ étant un entier.}$$

On a alors $$(\lambda_j)^n = e^{\frac{2\pi n i \gamma_j}{N}},$$

et on a $$(\lambda_j)^N = 1.$$

C'est-à-dire que les constantes fondamentales de module 1 de $K(M, P)$ sont racines d'une même équation binome $\lambda^N = 1$. S'il en est ainsi on a $$(\lambda_j)^{n+N} = (\lambda_j)^n,$$

et par suite $$A_{n+N} = A_n.$$

C'est-à-dire que $A_n(M, P)$ est une fonction périodique de n, avec une période N indépendante de M et P.

Alors $K_n(M, P)$ étant la somme d'une fonction périodique de n et

* Voir p. 17, de mon mémoire de Brno, 'Comportement asymptotique des solutions d'un système d'équations linéaires et homogènes aux différences finies du premier ordre à coefficients constants.' *Publ. Fac. Sc. Univ. Masaryk*, 178 (1933).

† p. 119.

d'une quantité $\epsilon_n(M, P)$ qui converge uniformément vers zéro avec $1/n$ pourra être appelé une fonction *asymptotiquement périodique* de n, et N en être appelé *une période asymptotique.*

Réciproquement, supposons que $K_n(M, P)$ soit une fonction asymptotiquement périodique de n, alors il en sera de même de

$$K_n(M, P) - \epsilon_n(M, P) = A_n(M, P).$$

Si N est la période asymptotique, $A_{sN+m}(M, P)$ devra, pour m fixe, converger uniformément quand s croît vers une fonction déterminée $\alpha_m(M, P)$. Or on a

$$A_{sN+m}(M, P) = \sum_{j=1}^{q} U_j(M, P)(e^{Ni\phi_j})^s e^{mi\phi_j} = \sum_{j=1}^{q} [U_j(\lambda_j)^{sN}](\lambda_j)^m.$$

Pour $m = 0, 1, 2, \ldots, q-1$, on a q équations linéaires par rapport aux q quantités $U_j(\lambda_j)^{sN}$, dont le déterminant des coefficients est un déterminant de Van der Monde qui $\neq 0$ puisque les $\lambda_j = e^{i\phi_j}$ sont distincts. On en tire des expressions de la forme

$$U_j(M, P)(\lambda_j)^{sN} = \sum_{m=0}^{q-1} W_m A_{sN+m},$$

où les W_m sont des constantes. Quand s croît, les seconds membres convergent uniformément vers des limites respectives, et les U_j ne sont pas identiquement nuls; cela n'est possible, puisque les λ_j sont de modules égaux à 1, que si les $(\lambda_j)^N = 1$; c'est-à-dire, si les constantes fondamentales de module 1 de $K(M, P)$ sont racines d'une même équation binome. En résumé, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Dans le cas borné, la condition nécessaire et suffisante pour que les noyaux itérés soient des fonctions asymptotiquement périodiques de n, est que les constantes fondamentales de module 1 de $K(M, P)$ soient, toutes, racines d'une même équation binome*

$$\lambda^N = 1.$$

Et alors N est une période asymptotique de $K_n(M, P)$.

V. Cas où les itérés $K_n(M, P)$ sont des fonctions périodiques de n

On a la relation

$$K_n(M, P) = A_n(M, P) + \epsilon_n(M, P).$$

Alors si les constantes fondamentales de module 1 de $K(M, P)$ sont toutes racines d'une même équation binôme $\lambda^N = 1$, on sait que $A_n(M, P)$ est une fonction périodique de n, de période N. Par suite, si $\epsilon_n \equiv 0$, $K_n(M, P)$ se réduira à une fonction périodique de n; c'est

ce qui aura lieu si $K(M, P)$ se réduit à la somme d'un nombre fini de noyaux principaux relatifs à des constantes fondamentales vérifiant une même équation binôme.

Réciproquement, supposons $K_n(M, P)$ fonction périodique de n de période N. Tout d'abord, on sera nécessairement dans le cas borné. De plus K_n sera au moins une fonction asymptotiquement périodique de n de période N, et par suite il faudra que les constantes fondamentales de module 1 de $K(M, P)$ soient racines de l'équation binôme $\lambda^N = 1$. Dans ces conditions, $A_n(M, P)$ sera fonction périodique de n de période N; il s'ensuit que $\epsilon_n(M, P)$ sera la différence $K_n - A_n$ de deux fonctions, toutes deux périodiques de période N, on aura donc une égalité de la forme

$$\epsilon_1(M, P) = \epsilon_{1+sN}(M, P) \quad \text{pour } s \text{ entier arbitraire.}$$

Si $s \to \infty$, le deuxième membre tend vers zéro, donc aussi le premier. Ce premier membre étant indépendant de s, cela n'est possible que si $\epsilon_1 \equiv 0$. Mais, par définition, on a

$$K(M, P) = A(M, P) + \epsilon_1(M, P)$$

donc K se réduit à $A(M, P)$. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante:

Théorème. *Pour que l'itéré $K_n(M, P)$ soit une fonction périodique de n, de période N, il faut et il suffit que $K(M, P)$ se réduise à une fonction de rang fini (somme d'un nombre fini de noyaux principaux) et que ses constantes fondamentales soient toutes racines d'une même équation binôme $\lambda^N = 1$, et pôles simples de la résolvante de $K(M, P)$.**

VI. Conditions de convergence uniforme, au sens ordinaire, des $K_n(M, P)$

On a toujours

$$K_n(M, P) = A_n(M, P) + \epsilon_n(M, P).$$

Supposons alors qu'il n'y ait pas, pour le noyau $K(M, P)$, de constantes fondamentales de module 1 autre que l'unité; deux cas sont alors à considérer:

(i) 1 *n'est pas constante fondamentale.* Dans ce cas $A(M, P)$ se réduit à zéro, on a donc $K_n = \epsilon_n$ et K_n converge uniformément vers zéro. On retrouve ainsi le résultat connu. (On est toujours dans le cas borné).

* Ce résultat particulier a été déja énoncé sous une autre forme par E. Daniele, 'Sui nuclei che si riproducono per iterazione': *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 37 (1914), 262–6.

(ii) 1 *est constante fondamentale.* Dans ce cas $A(M, P)$ est le noyau principal de K, relatif à l'unité, et on sait que pour un tel noyau on a $A_n(M, P) \equiv A(M, P)$, donc on aura

$$K_n = A(M, P) + \epsilon_n(M, P) \quad \text{et} \quad A(M, P) \not\equiv 0.$$

Par suite, lorsque $n \to \infty$, $K_n\,(M, P)$ converge uniformément vers $A(M, P)$.

Nous avons donc une condition suffisante de convergence uniforme au sens ordinaire des $K_n(M, P)$; savoir: il n'y a aucune constante fondamentale de K de module 1 autre que l'unité. Nous allons montrer que cette condition est nécessaire.

Remarquons tout d'abord que, dans les deux cas précédents, $K_n(M, P)$ qui converge uniformément au sens ordinaire vers une limite qui est 0 ou $A(M, P)$, converge aussi au sens généralisé et la limite est la même. Réciproquement, supposons que $K_n(M, P)$ converge uniformément. Alors: ou bien $K(M, P)$ n'a aucune constante fondamentale, ou bien $K(M, P)$ a au moins une constante fondamentale λ_j; à cette constante fondamentale correspond une fonction fondamentale $\phi_j(M) \not\equiv 0$; on aura alors

$$\phi_j(M) = \lambda_j \int\limits_V K(M, P)\phi_j(P)\,dP,$$

d'où en itérant n fois

$$\phi_j(M) = (\lambda_j)^n \int\limits_V K_n(M, P)\phi_j(P)\,dP.$$

Mais $\phi_j(M) \not\equiv 0$; donc il existe au moins un point M_0 tel que $\phi_j(M_0) \neq 0$. On a alors

$$\frac{1}{(\lambda_j)^n} = \frac{1}{\phi_j(M_0)} \int\limits_V K_n(M_0, P)\phi_j(P)\,dP.$$

Or $K_n(M, P)$ converge uniformément vers $\Pi(M, P)$, et, comme on l'a vu, $\phi_j(P)$ est borné; donc le deuxième membre de l'égalité ci-dessus tend vers une limite déterminée, par suite le premier membre aussi. Or cela n'est possible que si

$$\left|\frac{1}{\lambda_j}\right| \leqslant 1, \quad \text{c'est-à-dire si} \quad \begin{cases} |\lambda_j| > 1, \\ \text{ou } \lambda_j = 1. \end{cases}$$

Nous savions à l'avance, puisque on est dans le cas borné, que les constantes fondamentales de K sont, en module, supérieures ou égales à 1; mais ceci nous montre que dans le cas actuel, il ne peut

y avoir pour K de constantes fondamentales de module 1 autre que l'unité. Nous pouvons donc formuler l'énoncé suivant:

THÉORÈME. *Dans le cas borné, la condition nécessaire et suffisante pour que $K_n(M, P)$ converge uniformément au sens ordinaire, est que le noyau $K(M, P)$ n'ait pas d'autres constantes fondamentales de module 1 que l'unité.*

REMARQUE I. On pourrait obtenir ce résultat sans passer par l'intermédiaire des noyaux principaux, de la façon suivante. D'après certains résultats de M. Hadamard,* si l'on connaît le développement

$$K_1+\lambda K_2+\ldots+\lambda^{n-1}K_n+\ldots$$

d'une fonction méromorphe en λ, la condition nécessaire et suffisante pour que $c^n K_n$ tende vers une limite différente de zéro est que c soit pôle simple de cette fonction méromorphe, et qu'il n'existe pas d'autre pôle de module inférieur ou égal à c (G., p. 421). Donc:

La condition nécessaire et suffisante pour que $K_n(M, P)$ converge vers une limite différente de zéro est que l'unité soit seul pôle de module inférieur ou égal à 1 de la résolvante, et en soit pôle simple.

Ou encore dans le cas borné, pour que $K_n(M, P)$ converge vers une limite différente de zéro, il faut et il suffit que l'unité soit seule constante fondamentale de module 1 de $K(M, P)$.

C'est l'équivalent de l'énoncé du paragraphe précédent dans le cas de la limite $\neq 0$.

Il resterait cependant à prouver que le convergence, quand elle à lieu, est uniforme, ce qui n'est pas une conséquence nécessaire des conditions précédentes. Si nous avons pu le démontrer plus haut, c'est grâce à l'hypothèse faite sur $K(M, P)$, à savoir que ses itérés sont bornés à partir d'un certain rang.

REMARQUE II. Dans le cas actuel, $K_n(M, P)$ converge uniformément vers $\Pi(M, P)$; donc, si on forme la somme

$$\mathfrak{M}_\nu(M, P, n)=\frac{1}{n}\sum_{t=\nu}^{\nu+n-1} K_t(M, P) \qquad (\nu \geqslant m),$$

on sait que le premier membre convergera aussi vers $\Pi(M, P)$.

Précisons. On a vu que dans le cas borné le plus général, le produit

$$n[\mathfrak{M}_\nu(M, P, n)-\Pi(M, P)] \qquad (n \geqslant \nu)$$

est borné, quand M, P, n varient.

* *Journal de Math.*, 1892

Voyons ce que l'on peut dire dans le cas actuel. On sait que, dans ce cas, K_n se réduit à $A+\epsilon_n$; donc on a

$$K_n - A = \epsilon_n.$$

Or pour ϵ_n on a déjà vu quel est son ordre de grandeur, on a trouvé*

$$|\epsilon_n| < \frac{S}{\rho^n} \quad \text{avec} \quad 1 < \rho < \rho_0,$$

ρ_0 étant le plus petit des modules des constantes fondamentales de modules supérieurs à 1, et S une quantité indépendante de M, P, n.

Formons alors le produit ci-dessus. On a

$$n[\mathfrak{M}_\nu - \Pi] = [K_\nu - \Pi] + \ldots + [K_{\nu+n-1} - \Pi].$$

Le second membre n'est autre que la somme des n premiers termes de la série

$$s_\nu(M,P) = \sum_{t=\nu}^{+\infty} [K_t(M,P) - \Pi(M,P)].$$

Or cette série est majorée par la série $\sum_{t=\nu}^{+\infty} S/\rho^t$ qui est convergente puisque $1/\rho < 1$; par suite la série s_ν est normalement convergente. Ainsi, dans le cas qui nous occupe, le produit ci-dessus

$$n[\mathfrak{M}_\nu - \Pi]$$

non seulement est borné, mais tend vers $s_\nu(M,P)$ quand $n \to \infty$.

Ceci nous montre que si $s_\nu(M,P) \neq 0$, $\mathfrak{M}_\nu(M,P,n) - \Pi(M,P)$ a pour partie principale $s_\nu(M,P)/n$.

Nous voyons enfin que l'on peut approcher de la limite $\Pi(M,P)$ soit par la quantité $\mathfrak{M}_\nu(M,P,n)$, soit par $K_n(M,P)$.

VII. Conditions nécessaires et suffisantes pour que, dans le cas borné, $K_n(M,P)$ converge uniformément au sens ordinaire vers une limite $\Pi(P) \not\equiv 0$ indépendante de M

En combinant le résultat du cas nº VI précédent, avec celui du cas où la limite généralisée $\Pi(M,P)$ est indépendante de M,† on obtient le théorème suivant:

THÉORÈME. *Dans le cas borné, pour que la suite des $K_n(M,P)$ converge uniformément au sens ordinaire vers une limite indépendante de M, il faut et il suffit*

(*a*) *ou bien que l'unité ne soit pas constante fondamentale de $K(M,P)$, et alors $K_n(M,P)$ converge uniformément vers zéro;*

* p. 112. † Cas (i), p. 135.

(*b*) *ou bien que les trois conditions suivantes soient réalisées*:

(i) *la condition* (T_1) *est vérifiée;*

(ii) *il n'y a pas de constante fondamentale de* $K(M,P)$, *de module* 1, *autre que l'unité;*

(iii) *il y a une seule solution* $Y(M)$ *du système* (E) *des équations*

$$\text{(E)} \qquad \left.\begin{aligned} Y(P) &= \int_V K(Q,P)\,Y(Q)\,dQ \\ 1 &= \int_V Y(P)\,dP \end{aligned}\right\}.$$

Et alors la limite cherchée de $K_n(M,P)$ *est précisément cette solution unique de* (E).

Remarque. La condition (iii) peut être remplacée par la suivante: l'unité est racine simple du déterminant de Fredholm $D(\lambda)$ du noyau $K(M,P)$ (au sens que nous avons adopté, p. 137, pour l'ordre d'une constante fondamentale c considérée comme racine de $D(\lambda) = 0$).

THE HARMONIC PROBLEM ASSOCIATED WITH THE TORSION OF PRISMS: SOME SOLUBLE CASES

By J. HODGKINSON (*Oxford*)

[Received 15 February 1934]

THE solution of a number of two-dimensional physical problems is found in the determination of a function of a complex variable z, without singularity within a bounded region, the real part ψ of the function taking the value $\frac{1}{2}r^2$ at all points on the boundary of the region, r being the distance from a fixed point. This determination has been made for a number of shapes of the boundary,* but amongst the known solutions there are few where the region is exterior to the boundary.

The problem for the interior of a sector of a circle was solved generally by Stokes over eighty years ago, special cases being considered at a later date by Greenhill. I present a method applicable to the exterior region. It consists of the use of a subsidiary variable, the removal of an unwanted singularity from a trial function, and thereafter the application of a method strictly analogous to that used for the interior region. The appropriate subsidiary variable is found by means of a theorem to the effect that, when any triangle bounded by lines belonging to a dihedral configuration is mapped upon the fundamental triangle of the configuration, the transforming relation is rational.†

The subsidiary variable

For convenience we take the circular part of the boundary to be an arc of the circle $|z| = 1$. The region we consider in the first instance is that part of the plane which remains when the sectorial area given by

$$0 < |z| < 1, \qquad p\pi/2q < \arg z < (4q-p)\pi/2q$$

has been removed.

* References are given by A. E. H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity*, 4th edition (1927), 317–20; H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th edition (1932), 89–90; A. S. Ramsey, *Hydrodynamics*, 2nd edition (1920), 110.

† J. Hodgkinson, *Proc. London Math. Soc.* (2) 24 (1926), 71–82.

In the plane of a subsidiary variable ζ we consider the sectorial area given by

$$0 \leqslant |\zeta| \leqslant 1, \qquad -\pi/2q \leqslant \arg\zeta \leqslant \pi/2q.$$

The z-figure is supposed to be mapped on the ζ-figure. Since the z-figure is built up of $p+2q$ Schwarzian repetitions of the ζ-figure, the mapping relation is of the form $z = P(\zeta)/Q(\zeta)$, where $P(\zeta)$, $Q(\zeta)$ are polynomials of degree $p+2q$,* and we have the following correspondences:

(i) the point $\zeta = 0$ is a p-ple zero of z;

(ii) to the transformations $\zeta = \zeta'\exp(2i\pi/q)$, $\zeta\zeta' = \exp(i\pi/q)$ correspond respectively the transformations $z = z'\exp(2pi\pi/q)$, $zz' = \exp(pi\pi/q)$;

(iii) the points $\zeta = \exp(i\pi/2q)$, $\zeta = \exp(-i\pi/2q)$ are triple zeros of $z-\exp(pi\pi/2q)$, $z-\exp(-pi\pi/2q)$ respectively.

From (i) we write

$$z = \frac{\zeta^p(a_0\zeta^{2q}+a_1\zeta^{2q-1}+a_2\zeta^{2q-2}+\ldots+a_{2q})}{b_0\zeta^{2q}+b_1\zeta^{2q-1}+b_2\zeta^{2q-2}+\ldots+b_{2q}}.$$

By means of the first of the transformations of (ii) we simplify this to the form

$$z = \frac{\zeta^p(a_0\zeta^{2q}+a_q\zeta^q+a_{2q})}{b_0\zeta^{2q}+b_q\zeta^q+b_{2q}},$$

and by means of the second transformation still further to

$$z = \pm\frac{\zeta^p(a_0\zeta^{2q}+a_q\zeta^q+a_{2q})}{a_{2q}\zeta^{2q}-a_q\zeta^q+a_0},$$

and, finally, the application of the condition (iii) determines the transformation

$$z = \frac{\zeta^p\{(2q-p)\zeta^{2q}-(2q+p)\}}{(2q+p)\zeta^{2q}-(2q-p)}.$$

The substitution $\zeta = Z^q$ now transforms the ζ-sector into the semicircle given by $0 \leqslant |Z| \leqslant 1$, $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \arg Z \leqslant \frac{1}{2}\pi$, and the relation is

$$z = \frac{Z^{p/q}\{(2q-p)Z^2-(2q+p)\}}{(2q+p)Z^2-(2q-p)}.$$

Now let p, q tend to infinity in such a manner that p/q tends to λ, and we have the formula (in which Z^λ has its principal value)

$$z = \frac{Z^\lambda\{(2-\lambda)Z^2-(2+\lambda)\}}{(2+\lambda)Z^2-(2-\lambda)}.$$

* The reasons for this and the following statements are to be found in my paper to which I have referred. It is easy to verify that the transforming relation I obtain has the properties required.

This formula maps, upon the Z-semicircle, that part of the z-plane which remains when the sectorial area given by

$$0 < |z| < 1, \qquad \tfrac{1}{2}\lambda\pi < \arg z < (2-\tfrac{1}{2}\lambda)\pi$$

has been removed. It is convenient to write it in the form

$$z = \frac{Z^{\lambda}(\alpha^2 Z^2-1)}{Z^2-\alpha^2}; \qquad \alpha^2 = \frac{2-\lambda}{2+\lambda}.$$

The harmonic problem

We commence with the trial function $\frac{1}{2}z^2 \sec\lambda\pi$, the real part of which has the required value along the straight parts of the boundary.* In terms of Z this is

$$\frac{Z^{2\lambda}(\alpha^2 Z^2-1)^2}{2(Z^2-\alpha^2)^2}\sec\lambda\pi.$$

This function has a double pole, $Z = \alpha$, within the semicircle, the principal part of the expansion at that point being

$$\tfrac{1}{8}\alpha^{2\lambda-3}(1-\alpha^4)\left\{\frac{\alpha(1-\alpha^4)}{(Z-\alpha)^2}+\frac{(3-8\alpha^2+\alpha^4)}{Z-\alpha}\right\}\sec\lambda\pi.$$

The real part of an odd rational function of Z with real coefficients vanishes when $\arg Z = \pm\frac{1}{2}\pi$. Hence we can subtract any such function from the trial function without affecting its real part along the straight parts of the boundary, and we remove the singularity at the point $Z = \alpha$ by subtracting

$$\tfrac{1}{8}\alpha^{2\lambda-3}(1-\alpha^4)\left[\alpha(1-\alpha^4)\left\{\frac{1}{(Z-\alpha)^2}-\frac{1}{(Z+\alpha)^2}\right\}+\right.$$
$$\left.+(3-8\alpha^2+\alpha^4)\left\{\frac{1}{Z-\alpha}+\frac{1}{Z+\alpha}\right\}\right]\sec\lambda\pi.$$

Call the real part of the trial function thus amended $\psi_1(\rho,\theta)$, where $\rho = |Z|$, $\theta = \arg Z$. We now write

$$\psi(\rho,\theta) = \psi_1(\rho,\theta)+\psi_2(\rho,\theta).$$

We have to determine a function $\psi_2(\rho,\theta)$, harmonic within and on the boundaries of the Z-semicircle, except at the points $Z = \pm i$,† and satisfying the conditions

$$\text{(i)}\quad \psi_2(\rho,\pm\tfrac{1}{2}\pi) = 0 \qquad (0 \leqslant \rho \leqslant 1),$$
$$\text{(ii)}\quad \psi_1(1,\theta)+\psi_2(1,\theta) = \tfrac{1}{2} \qquad (-\tfrac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \tfrac{1}{2}\pi).$$

* A special function is used when λ is $\frac{1}{2}$ or $\frac{3}{2}$.

† A further exception of the point $Z = 0$ might conceivably have to be made, but it would not be to our advantage to make this exception unless it proved necessary.

This will be so if we can find a suitable expansion of the form

$$\psi_2(\rho,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta),$$

and the first of the conditions will be satisfied automatically, if n is odd in the cosine terms and even in the sine terms.

In the range $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$, $\psi_1(1,\theta)$ and thus $\psi_2(1,\theta)$ is an even function of θ. We may extend our definition of $\psi_2(1,\theta)$ by the relations

$$\begin{aligned} \psi_2(1,\theta) &= \tfrac{1}{2} - \psi_1(1,\theta) && (-\tfrac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \tfrac{1}{2}\pi); \\ \psi_2(1,\theta) &= -\psi_2(1,\theta+\pi) && (-\pi < \theta < -\tfrac{1}{2}\pi); \\ \psi_2(1,\theta) &= -\psi_2(1,\theta-\pi) && (\tfrac{1}{2}\pi < \theta \leqslant \pi). \end{aligned}$$

If now we expand $\psi_2(1,\theta)$ in a Fourier series valid in the range $-\pi < \theta \leqslant \pi$, no sine terms will occur because $\psi_2(1,\theta)$ is an even function, and the extended definition ensures that only cosines of odd multiples of θ occur. Hence there is an expansion to fulfil all our requirements. It is

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \rho^{2n+1} \cos(2n+1)\theta \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \psi_2(1,\phi) \cos(2n+1)\phi \, d\phi \right\},$$

i.e. the real part of the function

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ Z^{2n+1} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \psi_2(1,\phi) \cos(2n+1)\phi \, d\phi \right\},$$

i.e. of the function

$$\frac{4}{\pi}(Z-Z^3) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\psi_2(1,\phi)\cos\phi \, d\phi}{1-2Z^2\cos 2\phi + Z^4}.$$

Thus the harmonic function we seek is the real part of the function

$$\left[\frac{1}{2}\frac{Z^{2\lambda}(\alpha^2 Z^2-1)^2}{(Z^2-\alpha^2)^2} - \tfrac{1}{8}\alpha^{2\lambda-2}(1-\alpha^4)^2\left\{\frac{1}{(Z-\alpha)^2} - \frac{1}{(Z+\alpha)^2}\right\} - \right.$$
$$\left. -\tfrac{1}{8}\alpha^{2\lambda-3}(1-\alpha^4)(3-8\alpha^2+\alpha^4)\left\{\frac{1}{(Z-\alpha)} + \frac{1}{(Z+\alpha)}\right\}\right] \sec\lambda\pi +$$
$$+\frac{4}{\pi}(Z-Z^3) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\psi_2(1,\phi)\cos\phi \, d\phi}{1-2Z^2\cos 2\phi + Z^4}.$$

The method is now formally complete. A form free of integrals could be found. It is easy to see that $\psi_2(1,\phi)$ consists of two parts, a rational function of $\cos\phi$, the other a sum of terms of the form $\cos\mu\phi \times$ a

rational function of $\cos\phi$, and all the factors of the denominators are known. The integral will contain terms of the forms

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{A\cos\mu\phi\,d\phi}{1-e\cos\phi}, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{B\cos\mu\phi}{(1-e\cos\phi)^2}\,d\phi \qquad (|e|<1),$$

where the coefficients are functions of Z, α, and these integrals can be evaluated as power series in e.

Solution for the area exterior to a sector of angle $\frac{3}{2}\pi$

Here $$\lambda = \tfrac{1}{2}, \qquad \alpha^2 = \tfrac{3}{5}.$$

It is impossible to use the same trial function as in general, for $\sec\frac{1}{2}\pi$ is infinite. The solution of the interior problem for a quadrant suggests the function $-(2/\pi)z^2\log z$, whose real part meets our requirements. Since, however, $\arg z = \frac{1}{2}\arg Z$ along the straight boundaries, we may more conveniently take the function $-(1/\pi)z^2\log(kZ)$, where k is a real positive number. In terms of Z this is

$$-\frac{Z(\alpha^2Z^2-1)^2}{\pi(Z^2-\alpha^2)^2}\log(kZ).$$

There is one singularity within the Z-semicircle, viz. $Z=\alpha$, and, if we put $k = 1/\alpha$, this is a simple pole with residue $-\{(1-\alpha^4)^2/4\alpha^2\pi\}$. We amend the trial function accordingly as

$$-\frac{1}{\pi}\left\{\frac{Z(\alpha^2Z^2-1)^2}{(Z^2-\alpha^2)^2}\log\frac{Z}{\alpha}-\frac{(1-\alpha^4)^2Z}{2\alpha^2(Z^2-\alpha^2)}\right\}.$$

The remainder of the method is as before.

The problem of the area exterior to a quadrant is solved in a similar manner.

/ ON THE CLASS-NUMBER IN IMAGINARY QUADRATIC FIELDS

By HANS HEILBRONN (*Bristol*)

[Received 24 March 1934]

THERE is an old conjecture of Gauss* that the number of classes of definite binary quadratic forms
$$Q(x,y) = ax^2+bxy+cy^2 \qquad (a>0, \quad (a,b,c)=1)$$
of discriminant $$d = b^2-4ac$$
tends to infinity as $d \to -\infty$ through even values. The latter restriction is due to the fact that Gauss considered only forms with an even b.

In this paper the following slightly more general theorem will be proved.

THEOREM I. *If $h(d)$ denotes the number of classes of non-equivalent forms of discriminant d, then*
$$h(d) \to \infty \quad as \quad d \to -\infty. \tag{1}$$
Theorem I is equivalent to both of the following theorems:

THEOREM II. *If d runs through all negative fundamental*† *discriminants, then* (1) *is true.*

THEOREM III. *The number of ideal classes in the imaginary quadratic field* $\mathrm{P}(\sqrt{d})$ *of discriminant d tends to infinity as $d \to -\infty$.*

To establish the equivalence of Theorems I, II, and III we need two lemmas:

LEMMA I.‡ *If d_1 and d_2 are discriminants, and if there is an integer g such that*
$$d_1 = g^2 d_2,$$
then
$$h(d_1) = |g| h(d_2) \prod_{p|g} \left\{1-\left(\frac{d_2}{p}\right)\frac{1}{p}\right\} \geqslant h(d_2).$$

LEMMA II.§ *To every ideal class in the field* $\mathrm{P}(\sqrt{d})$ *of discriminant $d < -4$ corresponds one class of forms of discriminant d representing*

* *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), Art. 303.

† A discriminant d is called fundamental if for every discriminant $d' \neq d$ the number $\sqrt{(d/d')}$ is not a rational integer.

‡ Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Bd. 1, Satz 214 and Satz 209.

§ Ibid., Bd. 3, Teil XI, Kap. 3.

twice each the norms of all integer ideals in that class. To the principal class corresponds the form

$$x^2+xy+\tfrac{1}{4}(1-d)y^2 \quad \textit{if} \quad d \equiv 1 \pmod 4,$$
$$x^2-\tfrac{1}{4}dy^2 \quad \textit{if} \quad d \equiv 0 \pmod 4.$$

This correspondence can be made one-to-one.

Now we can prove the equivalence of the three theorems. As every fundamental discriminant (of a form) is also the discriminant of a field and vice versa, it is obvious by Lemma II that Theorems II and III are equivalent. Theorem II is contained in Theorem I, and Theorem I is a consequence of Theorem II and Lemma I.

Therefore it is sufficient to prove Theorem II or Theorem III only. We shall prove them both together, using sometimes the language of forms, sometimes the language of algebraic numbers, as is most convenient.

Many important steps have already been made towards proving the Gauss hypothesis. Two of them are relevant here.

THEOREM IV (Hecke).* *If*

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)n^{-s} \neq 0$$

for $\sigma > \frac{1}{2}$ *and for all real characters* χ *different from the principal character, then* (1) *holds.*

This theorem seems to be a very natural one; on the other hand the following surprising result has been obtained by Deuring.

THEOREM V (Deuring).† *If Riemann's function* $\zeta(s)$ *has at least one zero in the half-plane* $\sigma > \frac{1}{2}$, *then*

$$\varliminf_{d\to-\infty} h(d) \geqslant 2.$$

Quite recently Mordell ‡ has proved

THEOREM VI. (1) *holds under the assumption of Theorem V.*

In this paper we shall prove a generalization of Theorem VI.

THEOREM VII. *If there is, to modulus m, at least one real character* χ, *principal or not, so that*

$$L(\rho,\chi) = 0$$

for at least one ρ *in the half-plane* $\sigma > \frac{1}{2}$, *then* (1) *is true.*

* A proof is published in Landau's paper: 'Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper': *Göttinger Nachrichten* (1918), 285–95.

† Deuring, 'Imaginär-quadratische Zahlkörper mit der Klassenzahl (1)': *Math. Zeits.* 37 (1933), 405–15.

‡ *Proc. London Math. Soc.*, in press.

As the assumptions of either Theorem IV or Theorem VII are true, it is sufficient to prove Theorem VII. We shall assume throughout the whole paper that (1) does not hold and that the assumption of Theorem VII is satisfied which will give us a contradiction.

Notations

All *italic* letters except o, O, s, L, Q denote rational integers. $\chi(n)$ denotes a real character mod m $(m > 0)$ such that

$$L_0(s) = L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$$

vanishes for at least one ρ in the half-plane $\sigma > \frac{1}{2}$. We put

$$\sigma_m = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+\Re\rho).$$

Obviously
$$\tfrac{1}{2} < \sigma_m < \Re\rho < 1.$$

We suppose that m, χ, ρ, and σ_m are fixed throughout the paper.

We assume the existence of a positive H fixed throughout the paper such that there is an infinite number of discriminants d satisfying the relation
$$h(d) = H.$$

Being discriminants of quadratic fields, the numbers d satisfy the conditions
$$d \equiv 1,\, 5,\, 8,\, 9,\, 12,\, 13 \pmod{16};$$
$$\mu(-d) \neq 0 \quad \text{if} \quad d \equiv 1 \pmod 4,$$
$$\mu(-\tfrac{1}{4}d) \neq 0 \quad \text{if} \quad d \equiv 0 \pmod 4;$$
$$d \leqslant -3.$$

It is convenient to assume at once
$$d < -4.$$

All discriminants mentioned in the following text of this paper are supposed to satisfy all these conditions.

$$Q(x,y) = ax^2+bxy+cy^2 = \frac{1}{4a}\{(2ax+by)^2+|d|y^2\}$$

is called a 'reduced quadratic form' (shortly a 'form') of discriminant d if the following conditions are satisfied:
$$d = b^2-4ac,$$
$$-a < b \leqslant a \leqslant c,$$
$$b+1+|b+1|+c-a > 0.$$

Only forms of this type will occur in this paper.

By a well-known theorem* no two of these H forms are equivalent. We introduce the following Dirichlet series:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

$$\zeta(s,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\omega)^{-s} \quad (0 < \omega \leqslant 1),$$

$$\zeta_Q(s) = \tfrac{1}{2} \sum_{x,y \neq 0,0} Q(x,y)^{-s},$$

$$\zeta_d(s) = \sum_{Q} \zeta_Q(s),$$

where Q runs through the H forms of discriminant d;

$$L_0(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s},$$

$$L_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{n}\right) n^{-s},$$

$$L_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \left(\frac{d}{n}\right) n^{-s}.$$

Every series belonging to one of these seven types is absolutely convergent and regular for $\sigma > 1$.

The constants implied in the signs O and o depend only on H, m, ρ, σ_m, but they are independent of s, d, Q.

Some old lemmas

LEMMA III.† *If d is divisible by exactly t different primes, then*

$$2^{t-1} \mid h(d).$$

LEMMA IV.‡ *The functions*

$$\zeta(s),\ \zeta(s,\omega),\ \zeta_Q(s),\ \zeta_d(s),\ L_0(s),\ L_1(s),\ L_2(s)$$

are regular for $\sigma > 0$, $s \neq 1$.

LEMMA V.§ $\zeta_d(s) = \zeta(s) L_1(s)$ *for* $\sigma > 0$, $s \neq 1$.

LEMMA VI.|| $3a^2 \leqslant |d|$.

LEMMA VII.** $Q(x,y) \geqslant a$ *for x, y not both zero.*

* Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Bd. 1, Satz 198.

† Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, Art. 257.

‡ Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Bd. 2, Satz 369; and *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und Ideale*, Satz 154 (1).

§ Dirichlet-Dedekind, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 3. Aufl. (1879), § 90.

|| $3a^2 \leqslant 4ac - a^2 \leqslant 4ac - b^2 = |d|$.

** $Q(x,y) \geqslant ax^2 - |bxy| + cy^2 \geqslant a(x^2 - |xy| + y^2) \geqslant a$ for $x^2 + y^2 > 0$.

Further analytical lemmas

LEMMA VIII.

$$\gamma(s) = \gamma(s, m, l_1, y, Q) = \sum_{\substack{x=-\infty \\ x\equiv l_1(m)}}^{\infty} Q(x,y)^{-s}$$

$$= 2^{2s-1}a^{s-1}m^{-1}|d|^{\frac{1}{2}-s}y^{1-2s}\int_{-\infty}^{\infty}(\eta^2+1)^{-s}\,d\eta + O(|s|a^{\sigma}|d|^{-\sigma}y^{-2\sigma})$$

for $y \geqslant 1$, $\frac{1}{2} < \sigma < 2$.

Proof. We put

$$x = mz+l_1,$$
$$\alpha = (2am)^{-1}(2al_1+by),$$
$$\beta = (2am)^{-1}|d|^{\frac{1}{2}}y.$$

Then

$$2ax+by = 2amz+2al_1+by$$
$$= 2am(z+\alpha).$$

Hence

$$Q(x,y) = \frac{1}{4a}\{(2ax+by)^2+|d|y^2\}$$
$$= am^2\{(z+\alpha)^2+\beta^2\},$$
$$a^sm^{2s}\gamma(s) = \sum_{z=-\infty}^{\infty}\{(z+\alpha)^2+\beta^2\}^{-s}.$$

Hence we get, by the Euler-Maclaurin formula,

$$a^sm^{2s}\gamma(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\{(\xi+\alpha)^2+\beta^2\}^{-s}\,d\xi + \int_{-\infty}^{\infty}(\xi-[\xi]-\tfrac{1}{2})\frac{d}{d\xi}\{(\xi+\alpha)^2+\beta^2\}^{-s}\,d\xi$$

$$= \beta^{1-2s}\int_{-\infty}^{\infty}(\eta^2+1)^{-s}\,d\eta + \beta^{-2s}\int_{-\infty}^{\infty}(\beta\eta-\alpha-[\beta\eta-\alpha]-\tfrac{1}{2})\frac{d}{d\eta}(\eta^2+1)^{-s}\,d\eta.$$

Using the inequality

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}(\beta\eta-\alpha-[\beta\eta-\alpha]-\tfrac{1}{2})\frac{d}{d\eta}(\eta^2+1)^{-s}\,d\eta\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d}{d\eta}(\eta^2+1)^{-s}\right|d\eta$$

$$= \frac{|s|}{\sigma}\int_{0}^{\infty}\frac{d}{d\eta}(\eta^2+1)^{-\sigma}\,d\eta$$

$$= \frac{|s|}{\sigma} = O|s|$$

we get

$$\gamma(s) = a^{-s}m^{-2s}\beta^{1-2s}\int_{-\infty}^{\infty}(\eta^2+1)^{-s}\,d\eta + O(|s|a^{-\sigma}m^{-2\sigma}\beta^{-2\sigma})$$

$$= 2^{2s-1}a^{s-1}m^{-1}|d|^{\frac{1}{2}-s}y^{1-2s}\int_{-\infty}^{\infty}(\eta^2+1)^{-s}\,d\eta + O(|s|a^{\sigma}|d|^{-\sigma}y^{-2\sigma}).$$

LEMMA IX. *If* $1 \leqslant l_2 \leqslant m$, *and if, for* $\sigma > 1$,

$$\phi(s) = \phi(s,m,l_1,l_2,Q) = \sum_{\substack{y=1\\ y\equiv l_2(m)}}^{\infty}\ \sum_{\substack{x=-\infty\\ x\equiv l_1(m)}}^{\infty} Q(x,y)^{-s} = \sum_{\substack{y=1\\ y\equiv l_2(m)}}^{\infty}\gamma(s,l_1,m,y,Q),$$

then $\phi(s)$ *is regular for* $\sigma_m < \sigma < 2$, $s \neq 1$, *and*

$$\phi(s) = o|s| + o\left|\frac{1}{s-1}\right|$$

as $d \to -\infty$.

Proof. We put, for $\sigma > \frac{1}{2}$,

$$\psi(s,y) = \psi(s,m,l_1,y,Q)$$
$$= \gamma(s,m,l_1,y,Q) - 2^{2s-1}a^{s-1}m^{-1}|d|^{\frac{1}{2}-s}y^{1-2s}\int_{-\infty}^{\infty}(\eta^2+1)^{-s}\,d\eta.$$

Then, by Lemma VIII,

$$\sum_{\substack{y=1\\ y\equiv l_2(m)}}^{\infty}\psi(s,y) = \Psi(s) = \Psi(s,m,l_1,l_2,Q)$$

is uniformly convergent in every bounded region belonging to the strip $\sigma_m < \sigma < 2$ and therefore $\psi(s)$ is regular for $\sigma_m < \sigma < 2$.

Further, we get by Lemma VIII

$$\Psi(s) = O\{|s|a^{\sigma}|d|^{-\sigma}\zeta(2\sigma)\} = O(|s|a^{\sigma}|d|^{-\sigma}).$$

The identity

$$\phi(s)-\Psi(s) = 2^{2s-1}a^{s-1}m^{-1}|d|^{\frac{1}{2}-s}\int_{-\infty}^{\infty}(\eta^2+1)^{-s}\,d\eta \sum_{\substack{y=1\\ y\equiv l_2(m)}}^{\infty} y^{1-2s}$$

$$= 2^{2s-1}a^{s-1}m^{-2s}|d|^{\frac{1}{2}-s}\int_{-\infty}^{\infty}(\eta^2+1)^{-s}\,d\eta\, \zeta\left(s,\frac{l_2}{m}\right)$$

holds for the whole strip $\sigma_m < \sigma < 2$ except $s = 1$, since all functions are regular there. Using the inequalities

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\eta^2+1)^{-s}\,d\eta = O(1),$$

$$\zeta\left(s,\frac{l_2}{m}\right) = O|s| + O\left|\frac{1}{s-1}\right|,$$

both valid for $\sigma > \sigma_m$, we obtain, for $\sigma_m < \sigma < 2$, $s \neq 1$,

$$\begin{aligned}\phi(s) &= O(|s|a^{\sigma}|d|^{-\sigma}) + O\left\{a^{\sigma-1}|d|^{\frac{1}{2}-\sigma}\left(|s|+\frac{1}{|s-1|}\right)\right\}\\ &= O\left\{\left(|s|+\frac{1}{|s-1|}\right)\left|\frac{d}{a^2}\right|^{\frac{1}{2}-\sigma}(a^{1-\sigma}|d|^{-\frac{1}{2}}+a^{-\sigma})\right\}\\ &= O\left\{\left(|s|+\frac{1}{|s-1|}\right)\left|\frac{d}{a^2}\right|^{\frac{1}{2}-\sigma}a^{-\sigma}\left(\left|\frac{d}{a^2}\right|^{-\frac{1}{2}}+1\right)\right\}\\ &= o\left(|s|+\frac{1}{|s-1|}\right),\end{aligned}$$

by Lemma VI.

LEMMA X. *For* $\sigma_m < \sigma < 2$, $s \neq 1$,

$$L_0(s)L_2(s) = \zeta(2s)\prod_{p|m}(1-p^{-2s})\sum_{a}\chi(a)a^{-s}+o\left(|s|+\frac{1}{|s-1|}\right)$$

as $d \to -\infty$, *where* a *runs through the minima of the* H *forms of discriminant* d.

Proof. Let $e_{n,Q}$ denote the number of representations of n by the form Q. Then we know by Lemma V, for $\sigma > 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{Q}\tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}e_{n,Q}\,n^{-s} = \sum_{Q}\zeta_Q(s) = \zeta_d(s) = \zeta(s)L_1(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d}{n}\right)n^{-s}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}\sum_{g|n}\left(\frac{d}{g}\right).\end{aligned}$$

Hence, by the uniqueness of coefficients of Dirichlet's series,

$$\sum_{g|n}\left(\frac{d}{g}\right) = \tfrac{1}{2}\sum_{Q}e_{n,Q},$$

$$\begin{aligned}L_0(s)L_2(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\left(\frac{d}{n}\right)n^{-s}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}\sum_{g|n}\left(\frac{d}{g}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}\tfrac{1}{2}\sum_{Q}e_{n,Q}\\ &= \sum_{Q}\tfrac{1}{2}\sum_{x,y\neq 0,0}\chi\{Q(x,y)\}Q(x,y)^{-s}\end{aligned}$$

$$= \sum_{Q}\sum_{x=1}^{\infty}\chi\{Q(x,0)\}Q(x,0)^{-s}+\sum_{Q}\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=-\infty}^{\infty}\chi\{Q(x,y)\}Q(x,y)^{-s}$$

$$= \sum_{Q}\sum_{x=1} \chi(ax^2)(ax^2)^{-s} + \sum_{Q}\sum_{l_1=1}^{m}\sum_{l_2=1}^{m} \sum_{\substack{y=1\\ y\equiv l_2(m)}}^{\infty} \sum_{\substack{x=-\infty\\ x\equiv l_1(m)}}^{\infty} \chi\{Q(x,y)\}Q(x,y)^{-s}$$

$$= \sum_{Q} \chi(a)a^{-s} \sum_{\substack{x=1\\ (x,m)=1}}^{\infty} x^{-2s} + \sum_{Q}\sum_{l_1=1}^{m}\sum_{l_2=1}^{m} \chi\{Q(l_1,l_2)\}\phi(s,m,l_1,l_2,Q),$$

and this identity holds for $\sigma_m < \sigma < 2$ by Lemma IX. Using the second part of Lemma IX and the relation

$$\sum_{\substack{x=1\\ (x,m)=1}}^{\infty} x^{-2s} = \zeta(2s)\prod_{p\mid m}(1-p^{-2s}) \quad \text{for} \quad \sigma > \tfrac{1}{2}$$

we get the desired result.

Further arithmetical lemmas

Lemma XI. *If $a \mid d^k$ for some $k>0$, then $\mu(a) \neq 0$, and therefore $a \mid d$.*

Proof. Otherwise there would be a prime p such that

$$\begin{aligned}
&p^2 \mid a \mid d^k,\\
&p \mid d,\\
&p \mid (d+4ac),\\
&p \mid b^2,\\
&p^2 \mid b^2,\\
&p^2 \mid (b^2-4ac) \mid d,\\
&p = 2;\\
&d \equiv 0 \pmod 4,\\
&d \equiv b^2 \pmod{16},\\
&d \equiv 0 \text{ or } 4 \pmod{16},
\end{aligned}$$

which is a contradiction.

Lemma XII. *If $A>0$, $A \mid d$, $\mu(A) \neq 0$, then there is at most one form of discriminant d with minimum A.*

Proof. Let (a,b,c) and (a',b',c') be the coefficients of two different forms of this type. Then

$$a = a' = A, \qquad b \neq b', \qquad c \neq c', \qquad b^2-4ac = b'^2-4a'c' = d,$$
$$-A < b \leqslant A, \qquad -A < b' \leqslant A.$$

The congruence $\qquad x^2 \equiv d \equiv 0 \pmod A$

has only the solutions $x=0$ and $x=A$ for $-A < x \leqslant A$. Hence, without restriction of generality,

$$b = 0, \qquad b' = A, \qquad c = \frac{-d}{4A}, \qquad c' = \frac{A^2-d}{4A}$$

which is a contradiction since

$$c-c' = -\tfrac{1}{4}A$$

is not an integer.

LEMMA XIII. *If under the assumptions of Lemma XII*

$$A \leqslant \tfrac{1}{2}|d|^{\frac{1}{2}},$$

then there is at least one form of discriminant d with minimum A.

Proof. We put

$$\text{(i)} \qquad Q(x,y) = Ax^2+Axy+\frac{A^2-d}{4A}y^2$$

if $d \equiv 1 \pmod 4$ and if $d \equiv 12 \pmod{16}$, $A \equiv 0 \pmod 2$;

$$\text{(ii)} \qquad Q(x,y) = Ax^2-\frac{d}{4A}y^2$$

if $d \equiv 12 \pmod{16}$, $A \equiv 1 \pmod 2$, and if $d \equiv 8 \pmod{16}$. In both cases the coefficients are integers since

$$A \mid d, \qquad 4 \nmid A;$$

the discriminant is d and the form is reduced since

$$0 < A = \frac{4A^2}{4A} \leqslant \frac{-d}{4A} < \frac{A^2-d}{4A}.$$

LEMMA XIV. *If $a \nmid d^k$ for any $k > 0$, then $a \geqslant \frac{1}{4}|d|^{1/H}$.*

Proof. Let $\mathfrak{C}$ denote the class of ideals corresponding to the form

$$ax^2+bxy+cy^2$$

by Lemma II. Then we know the existence of an integer ideal $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{C}$ such that

$$N\mathfrak{a} = a.$$

Let p be a prime dividing a but not dividing d. Then

$$p \nmid \mathfrak{a}.$$

Otherwise the ideal $p^{-1}\mathfrak{a}$ would be an integer ideal in $\mathfrak{L}$ and

$$p^{-2}a = N(p^{-1}\mathfrak{a})$$

would be representable by our form which, by Lemma VII, is impossible. So we know, $\mathfrak{a}'$ denoting the conjugate ideal to $\mathfrak{a}$, that

$$p \nmid \mathfrak{a}, \qquad p \nmid \mathfrak{a}', \qquad p \mid \mathfrak{a}\mathfrak{a}'.$$

Therefore p splits up in two prime ideals $\mathfrak{p}$ and $\mathfrak{p}'$ such that

$$\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{p}' \mid \mathfrak{a}', \qquad \mathfrak{p}\mathfrak{p}' \nmid \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{p}\mathfrak{p}' \nmid \mathfrak{a}'.$$

As $p \nmid d$ the ideals $\mathfrak{p}$ and $\mathfrak{p}'$ are different. Therefore

$$\mathfrak{p}' \nmid \mathfrak{a},$$
$$\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}',$$
$$\mathfrak{a}^H \neq \mathfrak{a}'^H.$$

As H is the class-number of our field $P(\sqrt{d})$, these two different ideals are principal ideals and their norm a^H is at least four times representable by the principal form, i.e. there is at least one representation by the principal form with $y > 0$:

$$a^H = x^2+xy+\tfrac{1}{4}(1-d)y^2$$
$$= \tfrac{1}{4}\{(2x+y)^2+|d|y^2\} \geqslant \tfrac{1}{4}|d| \quad \text{if} \quad d \equiv 1 \pmod 4,$$
$$a^H = x^2-\tfrac{1}{4}dy^2 \geqslant \tfrac{1}{4}|d| \quad \text{if} \quad d \equiv 0 \pmod 4.$$
$$a \geqslant \tfrac{1}{4}|d|^{1/H}.$$

Lemma XV. *If a runs through the minima of the H quadratic forms belonging to d, then, if $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$,*

$$\Big|\sum_a \chi(a)a^{-s}\Big| \geqslant \tfrac{1}{4}H^2+o(1),$$

for $d \to -\infty$.

Proof. Let t denote the number of different prime divisors of d. Then, by Lemma III,

$$2^t \leqslant 2H.$$

Using Lemmas XI, XII, XIII, and XIV, we get

$$\Big|\sum_a \chi(a)a^{-s}-\sum_{n|d}\chi(n)\mu^2(n)n^{-s}\Big|$$
$$= \Big|\sum_{a\nmid d}\chi(a)a^{-s}-\sum_{\substack{n|d\\ n\neq a}}\chi(n)\mu^2(n)n^{-s}\Big|$$
$$\leqslant (\tfrac{1}{4}|d|^{1/H})^{-\sigma}\sum_a 1+(\tfrac{1}{2}|d|^{\frac{1}{2}})^{-\sigma}\sum_{n|d}\mu^2(n)$$
$$= o(1)H+o(1)2^t$$
$$= o(1).$$

Hence

$$\Big|\sum_a \chi(a)a^{-s}\Big| \geqslant o(1)+\Big|\sum_{n|d}\chi(n)\mu^2(n)n^{-s}\Big|$$
$$= o(1)+\Big|\prod_{p|d}(1+\chi(p)p^{-s})\Big|$$
$$\geqslant o(1)+\prod_{p|d}(1-2^{-\frac{1}{2}})$$
$$= o(1)+\left(\frac{1-2^{-1}}{1+2^{-\frac{1}{2}}}\right)^t$$
$$\geqslant o(1)+4^{-t}$$
$$\geqslant \tfrac{1}{4}H^{-2}+o(1).$$

Proof of Theorem VII

We put $s = \rho$ in Lemma X and we let d tend to $-\infty$. Then we get

$$0 = \lim_{d \to -\infty} \zeta(2\rho) \prod_{p|m} (1-p^{-2\rho}) \sum_a \chi(a)a^{-\rho},$$

and, since

$$\zeta(2\rho) \prod_{p|m} (1-p^{-2\rho})$$

does not vanish and is independent of d,

$$\lim_{d \to -\infty} \sum_a \chi(a)a^{-\rho} = 0,$$

which is a contradiction to Lemma XV.